Berechnung der ganzzahligen Wurzeln unbestimmter quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten aus den für letztere gefundenen Brüchen, nebst den Kriterien der Unmöglichkeit einer solchen Lösung.

Von Prof. **Adolf Kunerth.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 1. Juli 1880.)

§. 1.

Jeder vollständigen Gleichung dieser Art lässt sich durch eine lineare Substitution für eine ihrer Unbekannten die Gestalt $y^2 = ax^2+bx+c\ldots\mathrm{I}$ ertheilen, wo die Coëfficienten ganze Zahlen sind; dabei soll a positiv und ein Nichtquadrat sein.

In der Abhandlung: „Praktische Methode zur numerischen Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in rationalen Zahlen", publicirt im LXXVIII. Bande der Sitzungsberichte der k. A. d. W. II. Abth., Juli-Heft 1878, wurde ein Verfahren angegeben, jede in rationalen Zahlen mögliche Gleichung von der Form I auf die Form

$$y^2 = (\alpha x+\beta)^2 \pm (\gamma x-\delta)\,(\varepsilon x-\zeta)$$

zu bringen, in welcher die griechischen Buchstaben bestimmte Rationalzahlen bedeuten. Aus dieser Gleichung ergeben sich für x die zwei Werthe $\frac{\delta}{\gamma}$ und $\frac{\zeta}{\varepsilon}$, welche im Allgemeinen echte Brüche sind; und da entsteht die Frage, ob nicht aus einem dieser Brüche die etwa bestehenden ganzzahligen Werthe von x gefunden werden könnten?

Angenommen, es wäre ein Bruch $\frac{m}{n}$ bekannt, welcher für x in die Gleichung I gesetzt, derselben Genüge leistet, so kann die rechte Seite derselben auf die Form

$$(\alpha x+\beta)^2-(\gamma x-\delta)\,(nx-m) \quad = ax^2+bx+c\ldots\mathrm{II}$$

gebracht werden, sobald die mit griechischen Lettern bezeichneten

Zahlen bestimmt sind. Für

$$x=\frac{m}{n} \text{ wird } y=\alpha\frac{m}{n}+\beta=\frac{r}{n}, \text{ also } m\alpha+n\beta=r\ldots\text{III},$$

und aus dieser unbestimmten Gleichung findet man

$$[\alpha=-np+\alpha_1,\ \beta=mp+\beta_1]\ldots\text{IV};$$

hier stellen α_1 und β_1 bekannte ganze Zahlen vor, während p jeden rationalen Werth erhalten kann. Es lässt sich daher diese Transformation auf beliebig viele Arten ausführen, indem bei jeder Änderung von p die Zahlen α, β, γ, δ andere werden. Für ein specielles Paar von α und β findet man den Factor $\gamma x-\delta$ aus der Gleichung II durch einfache Rechnung.

§. 2.

Setzt man aus IV die allgemeinen Ausdrücke für α und β in die Gleichung II und verbindet die Glieder des entwickelten Quadrates mit den gleichartigen Gliedern des transponirten rechten Flügels, so wird

$$(\gamma x-\delta)(nx-m)=[n^2p^2-2n\alpha_1p+\alpha_1^2-a]x^2-$$
$$[2mnp^2-2(m\alpha_1-n\beta_1)p-(2\alpha_1\beta_1-b)]x+[m^2p^2+2m\beta_1p+\beta_1^2-c]$$

Aus II folgt:

$$\alpha_1^2-n\gamma=a,\ 2\alpha_1\beta_1+m\gamma+n\delta=b,\ \beta_1^2-m\delta=c;$$

somit

$$\alpha_1^2-a=n\gamma,\ 2\alpha_1\beta_1-b=-m\gamma-n\delta,\ \beta_1^2-c=m\delta;$$

nach Einsetzen dieser Werthe in die letzte Gleichung erhält man:

$$(\gamma x-\delta)(nx-m)=[n^2p^2-2n\alpha_1p+n\gamma]x^2-$$
$$[2mnp^2-2(m\alpha_1-n\beta_1)p+(m\gamma+n\delta)]x+[m^2p^2+2m\beta_1p+m\delta]$$

und durch Division beider Seiten mit $nx-m$:

$$\gamma x-\delta=(np^2-2\alpha_1p+\gamma)x-(mp^2+2\beta_1p+\delta)\ldots\text{V}.$$

Der rechte Flügel dieser Gleichung ist der allgemeine Ausdruck für den Wurzelfactor $\gamma x-\delta$, der für jeden neuen Werth von p ein anderer wird. Für $p=0$ wird $x=\frac{\delta}{\gamma}$; allgemein aber ist

$$x = \frac{mp^2 + 2\beta_1 p + \delta}{np^2 - 2\alpha_1 p + \gamma} \ldots \mathrm{VI}a,$$

die Gleichung der p-Function für $\frac{m}{n}$.

Diese Formel kann zufolge der Entstehung ihrer Bruchglieder concis auch so dargestellt werden:

$$x = \frac{(\beta^2 - c) : m}{(\alpha^2 - a) : n} \ldots \mathrm{VI}b,$$

wo für α und β die in IV stehenden Binome zu nehmen sind. Ist $\frac{m}{n}$ negativ, so hat man den Brüchen in VIa und VIb das Zeichen — vorzusetzen, dann ist in IV: $\alpha = -np + \alpha_1$ und $\beta = -mp + \beta_1$.

Setzen wir in VIa $\frac{1}{P}$ für p, so wird

$$x = \frac{\delta P^2 + 2\beta_1 P + m}{\gamma P^2 - 2\alpha_1 P + n},$$

die Gleichung der p-Function für $\frac{\delta}{\gamma}$. Ertheilt man der Variablen P einen besonderen Werth, für welchen $x = \frac{M}{N}$ wird, so sind die zugehörigen Grössen:

$$\alpha = -\frac{n}{P} + \alpha_1, \; \beta = \frac{m}{P} + \beta_1 \text{ und } y = \frac{M}{N}\alpha + \beta.$$

Oft ermöglicht der neue Nenner N eine rasche Lösung der Gleichung I.

§. 3.

Lässt sich für p eine rationale Zahl finden, die den Bruch in VIa zu einer ganzen Zahl macht, so ist die Aufgabe gelöst; ob dies aber nicht auch dann möglich wäre, wenn für p kein solcher Werth existirt, muss zuvörderst untersucht werden. Denn vielleicht lassen sich, wenn auch nicht mit $\frac{m}{n}$, so doch mit andern, die Gleichung I befriedigenden Brüchen p-Functionen bilden, aus denen ganze Zahlen für x gewonnen werden können. Darauf geben folgende Betrachtungen die entscheidende Antwort.

Für $x=\frac{m}{n}$ und $y=\frac{r}{n}$ besteht nach III die Gleichung

$$m\alpha+n\beta=r\ldots(1)$$

und ebenso für ein anderes Paar von Werthen, etwa für $x=\frac{m_1}{n_1}$ und $y=\frac{r_1}{n_1}$ die Gleichung $m_1\alpha+n_1\beta=r_1\ldots(2)$.

Alle aus (1) entwickelten Werthe von α und β geben solche Formen von II, in denen der Wurzelfactor $nx-m$ vorkommt, wogegen die aus (2) gefundenen Werthe von α und β Formen liefern, die den Wurzelfactor n_1x-m_1 enthalten. Lässt man jedoch (1) und (2) als zusammengehörige Gleichungen gelten, und bestimmt aus ihnen α und β, die in diesem Falle gemeiniglich Brüche sind, so befriedigt das gefundene Zahlenpaar jede dieser zwei Gleichungen, und es muss daher in der mit diesen Werthen gebildeten Form II sowohl $nx-m$ als auch n_1x-m_1 erscheinen. Da nun das letztere Binom alle möglichen Wurzelfactoren vorstellt, so kann in der Gleichung II mit dem speciellen Factor $nx-m$ dieser selbst und jeder andere der Gleichung I zukommende Wurzelfactor in Verbindung treten. Der rechtsstehende Ausdruck in V repräsentirt somit alle Wurzelfactoren der Gleichung I und der Bruch in VI, wie überhaupt jede p-Function, alle möglichen Werthe von x.

Die Gleichung I kann daher nur dann in ganzen Zahlen gelöst werden, wenn für p solche Werthe bestehen, die den Bruch in VIa in eine ganze Zahl verwandeln; wird aber nachgewiesen, dass ein solcher Werthe für p nicht möglich ist, so ist auch die gestellte Aufgabe unmöglich.

§. 4.

Schafft man in VIa mittelst der Substitution $p=\frac{p_1+\alpha_1}{n}$ das zweite Glied des Nenners weg, so wird

$$x=\frac{mp_1^2+2(m\alpha_1+n\beta_1)p_1+(m\alpha_1^2+2n\alpha_1\beta_1+n^2\delta)}{n(p_1^2-a)}\ldots\text{VII}a;$$

ersetzt man im Zähler die Grösse δ durch $\frac{\beta_1^2-c}{m}$ (§. 2), hierauf $m\alpha_1+n\beta_1$ durch r (nach III), endlich r^2-cn^2 durch am^2+bmn, da $r^2=am^2+bmn+cn^2$ ist, so folgt:

$$x = \frac{mp_1^2 + 2rp_1 + (am + bn)}{n(p_1^2 - a)} \ldots \text{VII}b;$$

multiplicirt man nun beide Seiten mit n und verwandelt den Bruch in eine gemischte Zahl, so erhält man die Hauptformel

$$nx = m + \frac{2rp_1 + (2am + bn)}{p_1^2 - a} \ldots \text{VIII},$$

welche fortan aus den Werthen der Unbekannten:

$$x = \frac{m}{n},\ y = \frac{r}{n}$$

und den Constanten in I aufgestellt werden kann. Ist in der Gleichung I $b = 0$, so wird

$$nx = m + 2\frac{rp_1 + am}{p_1^2 - a}.$$

§. 5.

Die Formel VIII entsteht auch durch Subtraction der identischen Gleichung

$$\frac{r^2}{n^2} = a\frac{m^2}{n^2} + b\frac{m}{n} + c$$

von der unter I stehenden; also

$$y^2 = a\left(x^2 - \frac{m^2}{n^2}\right) + b\left(x - \frac{m}{n}\right) + \frac{r^2}{n^2};$$

setzt man für dieses Trinom das Quadrat

$$\left[p_1\left(x - \frac{m}{n}\right) - \frac{r}{n}\right]^2,$$

reducirt, und entwickelt x, so kommt

$$x = \frac{mp_1^2 + 2rp_1 + (am + bn)}{n(p_1^2 - a)}, \text{ wie in VII}b.$$

Der Satz

$$y = p_1\left(x - \frac{m}{n}\right) - \frac{r}{n} \ldots \text{IX}$$

gestattet eine bequeme Berechnung von y aus dem für x gefundenen Werthe. Stellt man hier für x den Bruch aus VIIb ein, so wird

$$ny = r + \frac{(2am+bn)p_1+2ar}{p_1^2-a}.$$

In allen diesen Formeln ist r mit jenem Vorzeichen zu nehmen, welches ihm nach III zukömmt.

Im Allgemeinen sind die brauchbaren Werthe von p und p_1 gebrochene, oft aber nebstbei auch ganze Zahlen; daher setze man in VIII $p_1 = \frac{v}{w}$, wodurch

$$nx = m + \frac{2rv+(2am+bn)w}{v^2-aw^2}w \ldots \mathrm{X}$$

wird.

§. 6.

Damit x eine ganze Zahl werden könne, müssen die noch unbestimmten, ganzen und gegen einander theilfremden Zahlen v und w zwei Bedingungen erfüllen.

1. Der Nenner v^2-aw^2 muss immer durch n theilbar sein. Für p darf kein Bruch gesetzt werden, dessen Nenner mit n einen Factor gemein hat; denn ist $n=\nu\pi$ und $p=\frac{k}{\nu l}$, so wird in VIa

$$x = \frac{mk^2+2\beta_1 k\nu l+\delta\nu^2 l^2}{\nu\pi k^2-2\alpha_1 k\nu l+\gamma\nu^2 l^2},$$

da nun $\nu\pi$, d. i. n prim gegen m und ν prim gegen k ist, so kann der Zähler dieses Bruches durch ν nicht theilbar sein und letzterer keine ganze Zahl werden.

Ertheilt man jedoch der Variablen p einen solchen Werth $\frac{k}{l}$, dass l prim gegen n ist, so wird in der Gleichung $p_1 = np-\alpha_1$ (nach §. 4) das Product np $(=\frac{nk}{l})$ sich nicht abkürzen lassen, und nach Einsetzen dieses Binoms für p_1 in VIIa wird

$$x = \frac{n^2(mp^2+2\beta_1 p+\delta)}{n^2(np^2-2\alpha_1 p+\gamma)}$$

oder

$$x = \frac{n^2(mk^2+2\beta_1 kl+\delta l^2)}{n^2(nk^2-2\alpha_1 kl+\gamma l^2)}\ldots(1),$$

und dieser Bruch kann eine ganze Zahl werden.

Da nun die gesuchten Werthe von p_1 die Form $np-\alpha_1$ mit Ausschluss jeder Reduction von np haben müssen, so lehrt uns die letzte Formel, dass für p_1 nur solche Brüche — auch vom Nenner Eins — zulässig sind, welche den Nenner des Bruches in VII in ein Vielfaches von n^2 verwandeln.

Schreiben wir $\frac{v}{w}$ statt p_1 in VIIb, so wird

$$x = \frac{mv^2+2rvw+(am+bn)w^2}{n(v^2-aw^2)} \ldots (2)$$

und da die Brüche in (1) und (2) aus den identischen Brüchen in VIIa und VIIb durch Einsetzen desselben reducirten Bruches $\frac{nk}{l}-\alpha_1$ respective $\frac{v}{w}$ entstanden und ungekürzt geblieben sind, so müssen auch sie identisch und ihre Nenner einander gleich sein; also ist $n^2(nk^2-2\alpha_1 kl+\gamma l^2) = n(v^2-aw^2)$ und v^2-aw^2 ein Dividuum von n.

§. 7.

2. Der Nenner v^2-aw^2 muss stets ein Theiler von $n(b^2-4ac)$ sein. Um dies zu beweisen, bringen wir in X die Zahl m nach links, multipliciren hierauf beide Seiten mit $2rv-(2am+bn)w$ und addiren $-4r^2w$ hinzu; da wird nach rechtsseitig vollzogener Reduction:

$$(nx-m)[v\,2r-(2am+bn)w]-4r^2w = -\frac{-4ar^2+(2am+bn)^2}{v^2-aw^2}w^3 =$$

$$= -\frac{n^2(b^2-4ac)}{v^2-aw^2}w^3 \ldots \mathrm{XI};$$

von x abgesehen, bezeichnen alle hier vorkommenden Buchstaben ganze Zahlen.

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich in zwei Theile zerlegen, von denen der eine den Factor n explicite, der andere aber implicite enthält; dieser ist:

$$-2mrv+2am^2w-4r^2w \text{ oder } 2w(am^2-r^2)-2r(mv+rw).$$

Da nach §. 6 die Brüche $\frac{kn-\alpha_1 l}{l}$ und $\frac{v}{w}$ einander gleich und reducirt sind, so ist $v = kn-\alpha_1 l$, $w = l$; und weil $r = m\alpha_1+n\beta_1$ (nach III), so wird $mv = kmn-\alpha_1 lm$ und $rw = \beta_1 ln+\alpha_1 lm$, daher nach Addition beider Gleichungen: $mv+rw=n(km+\beta_1 l)$; weil ferner $r^2=am^2+bmn+cn^2$, so ist $am^2-r^2=-n(bm+cn)$ und jener zweite Theil ist gleich $-2nw(bm+cn)-2nr(km+\beta_1 l)$. Der linke Flügel der Gleichung XI ist somit durch n theilbar und nach beiderseitiger Division mit n bleibt rechts der Bruch

$$-\frac{n(b^2-4ac)w^3}{v^2-aw^2};$$

da aber w^3 prim gegen den Nenner ist, so muss $n(b^2-4ac)$ durch v^2-aw^2 theilbar sein.

Das Product $n^2(b^2-4ac)$ bezeichnen wir mit S und nennen es die Stammzahl, weil ihm alle passenden Werthe von v und w entstammen, falls solche vorkommen; es ist auch

$$S=-4ar^2+(2am+bn)^2.$$

In der Gleichung XI können unter gewissen Bedingungen Abkürzungen vorgenommen werden, welche die Rechnung vereinfachen; sie werden in den nächsten neun Paragraphen behandelt.

§. 8.

Ist $2r=dh$ und $2am+bn=fh$, und man dividirt XI durchgehends mit h, so wird im ersten Bruche der Zähler gleich

$$\frac{S}{h}=S_1=h(-ad^2+f^2)\ldots \text{die reducirte Stamm-}$$

zahl, und

$$nx=m+h\,\frac{dv+fw}{v^2-aw^2}\,w\ldots[1];$$

dies ist die Formel X nach dem Herausheben des grössten gemeinen Factors h im Zähler.

Ist dabei h_1 das grösste gemeinschaftliche Mass von $n(=h_1 n_1)$ und $h(=h_1\rho)$, so wird durch obige Division mit h der Zähler des zweiten Bruches gleich

$$\frac{n}{h_1}\cdot\frac{n(b^2-4ac)}{\rho}.$$

und wenn wir die Determinante b^2-4ac mit D bezeichnen, so wird $\frac{nD}{\rho}$ ein Dividuum von v^2-aw^2; da aber der Zähler des ersten Bruches in XI durch $h^2(=h_1^2\rho^2)$ theilbar ist, so ist es auch der zweite Zähler $(=h_1^2n_1^2D)$, und weil n_1^2 und ρ^2 relative Primzahlen sind, so muss D durch ρ^2 theilbar sein. Der Factor ρ $(=\frac{h}{h_1})$ kann somit in D gelöscht werden; dadurch wird die Anzahl der etwa möglichen Factoren von v^2-aw^2 vermindert und die Rechnung abgekürzt. Der Nenner N darf nur solche Factoren enthalten, von denen a ein quadratischer Rest ist, da sonst die Gleichung $v^2=aw^2+N$ in ganzen und theilfremden Zahlen nicht möglich wäre.

§. 9.

Ist $a=\mu^2a_1$, $2r=\mu d$ und $2am+bn=\mu^2f$, so lässt sich, wenn man in XI $v=\mu v_1$ setzt, der erste Bruch daselbst durch μ^2 heben und überdies jede Seite der Gleichung durch μ^2 dividiren. Dadurch verliert die Stammzahl den Factor μ^4 und der Nenner v^2-aw^2 den Factor μ^2; hierauf findet man

$$nx=m+\frac{dv_1+fw}{v_1^2-a_1w^2}w\ldots[2] \text{ und } \frac{S}{\mu^4}=S_{,,}=-a_1d^2+f^2,$$

der Rückstand im ersten Zähler. Auf die Formel [2] kömmt man auch, wenn man in VIII oder X μp_{II} für p_1 resp. μv_1 für v setzt und den Bruch durch μ^2 hebt. Haben d und f ein gemeinschaftliches Mass, so ist dieses herauszuheben.

Diese Reduction kann nur dann stattfinden, wenn n ein Dividuum von μ oder $\frac{\mu}{2}$ ist, denn nur in diesem Falle können $2r$ durch μ, und bn durch μ^2 theilbar und die Coëfficienten in I frei von gemeinen quadratischen Factoren sein, wie sich aus der Gleichung $r^2=am^2+bmn+cn^2\ldots[3]$ ersehen lässt, in welcher der obigen Annahme zufolge jedes Glied durch μ^2 oder $\left(\frac{\mu}{2}\right)^2$ theilbar sein soll.

§. 10.

Bezüglich des Nenners $v_1^2-a_1w^2$ ist Folgendes zu merken: Während v^2-aw^2 mindestens durch die höchste Potenz jeder in n vorkommenden Primzahl μ_1 theilbar sein muss, ist $v_1^2-a_1w^2$ an den Factor μ_1 gebunden, wenn die ganze Zahl $\frac{n}{\mu_1^2}$ oder wenn d

und f durch μ_1 theilbar sind. Ist nämlich $n = \mu_1^3 n_1$, so bleibt im Quotienten $\frac{v^2 - aw^2}{\mu_1^2}$, dessen Dividend ein $n$faches ist, μ_1 zurück, und demzufolge auch in $v_1^2 - a_1 w^2$; kommt aber μ_1 in d und f vor, so muss, weil n prim gegen m ist, der Factor μ_1 hinausfallen, wenn die rechte Seite in [2] eine ganze Zahl werden soll. Findet jedoch keiner dieser zwei Fälle statt, und enthielte $S_{,,}$ selbst eine wirkliche Potenz von μ_1, so kann $v_1^2 - a_1 w^2$ an μ_1 gebunden sein oder nicht, daher in diesem Falle die Rechnung alternirend zu führen ist. Kommt μ_1 in $S_{,,}$ gar nicht, oder nicht potenzirt vor, so muss, beziehungsweise kann es in $v_1^2 - a_1 w^2$ fehlen (§. 14).

§. 11.

Endlich lässt sich, wenn $a = \mu^2 a_1$ und $2am + bn = \mu f$ ist, der erste Bruch in XI für $v = \mu v_1$ durch μ^2 heben, wodurch in S und im Nenner der Factor μ^2 getilgt wird; dann ist

$$\mu n x = \mu m + \frac{2 r v_1 + f w}{v_1^2 - a_1 w^2} w \ldots [4] \text{ und } \frac{S}{\mu^2} = S_{,,,} = -4 a_1 r^2 + f^2.$$

Dieselbe Formel wird erhalten, wenn man in VIII oder X beide Seiten mit μ multiplicirt und den Bruch durch μ^2 abkürzt; doch ist diese Reduction wegen Vergrösserung des Coëfficienten von x minder vortheilhaft.

In [4] muss n prim gegen μ sein; denn angenommen $n = \mu n_1$, so würde die obige Gleichung [3] lauten:

$$r^2 = \mu^2 a_1 m^2 + b m \mu n_1 + c \mu^2 n_1^2,$$

und könnte nur dann bestehen, wenn $b \mu n_1$ d. i. bn durch μ^2, somit r durch μ theilbar wären, was der Annahme widerspricht und eine unmittelbare Abkürzung durch μ^2 ermöglichen würde. Daher bleibt $v_1^2 - a_1 w^2$ ein Vielfaches von n und w ist gemeiniglich durch μ theilbar.

Alle diese Abkürzungen sind schon in der Hauptformel VIII auszuführen, da XI zur Rechnung nicht nöthig ist.

§. 12.

Im Allgemeinen gibt es für jeden beliebigen Werth von p_1 einen zugehörigen zweiten Werth p_{II}, welcher in der Formel

$$nx = m + \frac{2rp_1 + (2am + bn)}{p_1^2 - a} \ldots \text{VIII}$$

für x dieselbe Zahl hervorbringt, wie p_{I}. Um p_{II} zu finden, schreiben wir in VIII s für $nx - m$, g für $2am + bn$ und lösen die Gleichung

$$s = \frac{2rp_1 + g}{p_1^2 - a} \ldots [5],$$

oder geordnet:

$$p_1^2 - \frac{2r}{s} p_1 - \frac{as + g}{s} = 0 \ldots [6]$$

nach p_1 auf; also

$$p_1 = \frac{r \pm \sqrt{as^2 + gs + r^2}}{s};$$

führen wir für s den obigen Bruch wieder ein und radiciren, so wird

$$p_1 = \frac{rp_1^2 - ar \pm (rp_1^2 + gp_1 + ar)}{2rp_1 + g},$$

somit

$$p_{\text{I}} = p_{\text{I}} = \frac{v_1}{w_1} \text{ und } p_{\text{II}} = -\frac{(2am + bn)p_1 + 2ar}{2rp_1 + (2am + bn)} = \frac{v_{\text{II}}}{w_{\text{II}}};$$

dies sind allgemein zwei äquivalente Substitutionen und

$$v_1^2 - aw_1^2 (= N_1) \text{ und } v_{\text{II}}^2 - aw_{\text{II}}^2 (= N_{\text{II}})$$

die ihnen entsprechenden äquivalenten Nenner.

Der Bruch p_{II} lässt sich durch das grösste gemeinschaftliche Mass von g und $2r$ sonst aber stets durch n heben, was sogleich ersichtlich wird, wenn man daselbst

$$p_{\text{I}} = \frac{kn - \alpha_1 l}{l}, \text{ (§. 6)}, r = m\alpha_1 + n\beta_{\text{I}}$$

und hierauf im Nenner $\alpha_1^2 - a = n\gamma$ setzt.

§. 13.

Nach XI ist

$$\left.\begin{aligned} &(nx - m)(2rp_1 - g) - 4r^2 = -\frac{n^2 D}{p_1^2 - a} \\ &\text{und ebenso} \\ &(nx - m)(2rp_{\text{II}} - g) - 4r^2 = -\frac{n^2 D}{p_{\text{II}}^2 - a} \end{aligned}\right\} [7]$$

hier stellen p_{I} und p_{II} reducirte Brüche vor. Subtrahirt man die untere Gleichung von der oberen und dividirt hierauf beiderseits durch $p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}}$, so kömmt

$$2rs = \frac{n^2D(p_{\mathrm{I}}+p_{\mathrm{II}})}{(p_{\mathrm{I}}^2-a)(p_{\mathrm{II}}^2-a)};$$

da nach [6] $p_{\mathrm{I}}+p_{\mathrm{II}} = \frac{2r}{s}$ ist, so geht die letzte Formel über in

$$s^2 = \frac{n^2D}{(p_{\mathrm{I}}^2-a)(p_{\mathrm{II}}^2-a)} = \frac{n^2Dw_{\mathrm{I}}^2w_{\mathrm{II}}^2}{(v_{\mathrm{I}}^2-aw_{\mathrm{I}}^2)(v_{\mathrm{II}}^2-aw_{\mathrm{II}}^2)};$$

weil ferner in [5] das grösste gemeinschaftliche Mass h von $2r$ und g nicht für jeden entsprechenden Werth von p_1 gegen den Nenner p_1^2-a ganz hinausfallen muss, da h überdies einen Theiler enthalten kann, der im Nenner gar nicht vorkommen darf; so können, wenn h nicht Eins ist, die Zahlen $2r$, g und s für verschiedene Werthe von p_1 einen oder den andern Factor von h als gemeinsch. Mass besitzen, und es wird demzufolge der Nenner s der zwei Brüche in [6] nicht immer der kleinste sein. Da nun laut [6] die Summe der reducirten Brüche $\frac{v_{\mathrm{I}}}{w_{\mathrm{I}}}$ und $\frac{v_{\mathrm{II}}}{w_{\mathrm{II}}}$ gleich $\frac{2r}{s}$ und ihr Product $\frac{v_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{II}}}{w_{\mathrm{I}}w_{\mathrm{II}}}$ gleich $-\frac{as+g}{s}$ ist, so können die Glieder des letzten Bruches auch grösser sein als die des ihm vorangehenden, so dass man im Allgemeinen annehmen kann: $s=\rho_{\mathrm{I}}w_{\mathrm{I}}w_{\mathrm{II}}$ und $g=\rho_{\mathrm{I}}g_{\mathrm{I}}$, also $w_{\mathrm{I}}^2w_{\mathrm{II}}^2 = \frac{s^2}{\rho_1^2}$; oben eingesetzt und reducirt, wird

$$N_{\mathrm{I}}N_{\mathrm{II}} = \frac{n^2D}{\rho_1^2} \ldots \mathrm{XII}a.$$

Da N_{I} und N_{II} Dividuen von n sind, so muss D durch ρ_1^2 theilbar und jeder dieser zwei Nenner ein Divisor von $n\frac{D}{\rho_1^2}$ sein; für manche Werthe von p_1 fällt daher ρ_1^2 als ein zur Bildung von N eben unnöthiger Factor aus D und aus beiden Seiten der Gleichungen [7] hinaus; ist ρ_1 eine Primzahl und a ein Nichtrest von ρ_1, so muss ρ_1^2 immer hinausfallen. Zerlegt man das grösste gemeinschaftliche Mass h von $2r$ und g in zwei solche Factoren h_{II} und ρ_{II}, dass alle einfachen Divisoren von h_{II} in n aufgehen, ρ_{II} dagegen prim gegen n ist, so kann $nx-m$, d. i. s durch ρ_{II} theilbar sein, und ρ_{II}^2 ist der grösste Divisor von h^2, durch welchen in besonderen Fällen beide Seiten in [7] theilbar sein können. Die obige Zahl ρ_I ist somit ein Theiler von ρ_{II} und dieses wieder ein Theiler von ρ (§. 8); daher können aus D gelegentlich nur solche quadratische Factoren hinausfallen, welche Divisoren von h^2 und prim gegen n sind. Dies ist bei den zur Ermittlung von N anzustellenden Versuchen zu benützen. Ist α ein Nichtrest der Primzahl π und die ganze Zahl $\frac{D}{\pi^{2\nu}}$ prim gegen π, so ist $\pi^{2\nu}$ in D zu löschen.

§. 14.

Enthält D einen Primfactor blos in der ersten Potenz, so kann derselbe nur in Einem Nenner vorkommen (XII a), und da zur Berechnung von x der diesem äquivalente Nenner genügt, so darf ein singulärer Factor in D gelöscht werden, wodurch sich die Zahl der zur Ergründung von N nöthigen Versuche auf die Hälfte reducirt.

Wäre $v^2-aw^2=N_1$ in ganzen Zahlen möglich, nicht aber $v^2-aw^2=N_{II}$, so wäre die erste Gleichung zur Bestimmung von x unbrauchbar, und wenn sich zwei solche in ganzen und theilfremden Zahlen auflösliche Gleichungen nicht bilden lassen, so ist auch I in ganzen Zahlen unmöglich; doch ist dieser Satz positiv aufgestellt, nicht allgemein giltig.

Wurde der Bruch in VIII durch μ^2 gehoben, so hat man in XIIa $\frac{S}{\mu^4}$ für S zu setzen.

Wenn die Determinante in I ein Quadrat ist, so lassen sich durch unmittelbare Zerlegung des dortigen Trinoms zwei Werthe von x finden und für jeden derselben hat p_1 nur Einen Werth.

§. 15.

Ist in I $b=0$, also $y^2=ax^2+c$, so kann jeder Werth von x mit beiden Vorzeichen genommen werden, daher nach VIII

$$nx=m+2\frac{rp_1+am}{p_I^2-a}$$

und

$$nx=-m-2\frac{rp_I+am}{p_I^2-a}=m+2\frac{rp_{III}+am}{p_{III}^2-a}.$$

Es ist somit

$$\frac{rp_{\mathrm{III}}+am}{p_{\mathrm{III}}^2-a} = -\frac{mp_1^2+rp_1}{p_1^2-a},$$

und nach p_{III} aufgelöst:

$$p_{\mathrm{III}} = \frac{a}{p_1} \text{ und } = -\frac{rp_1+am}{mp_1+r};$$

lässt man hier für p_1 auch den äquivalenten Werth

$$p_{\mathrm{II}}\left(= -\frac{a(mp_1+r)}{rp_1+am}\right)$$

aus §. 12 eintreten, so ergeben sich die vier äquivalenten Substitutionen: p_1 und

$$p_{\mathrm{II}} = -\frac{a(mp_1+r)}{rp_1+am}$$

bezüglich $+x$ und

$$p_{\mathrm{III}} = \frac{a}{p_1} \text{ nebst } p_{\mathrm{IV}} = -\frac{rp_1+am}{mp_1+r}$$

bezüglich $-x$, wobei

$$p_1 p_{\mathrm{III}} = p_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{IV}} = a.$$

$$v_1^2-aw_1^2 (= N_1),\quad \frac{-ac(v_1^2-aw_1^2)}{\rho_2^2} (= N_{\mathrm{II}}),$$

$$\frac{-a(v_1^2-aw_1^2)}{\rho_3^2} (= N_{\mathrm{III}}) \text{ und } \frac{c(v_1^2-aw_1^2)}{\rho_4^2} (= N_{\mathrm{IV}})$$

sind die zugehörigen äquivalenten Nenner. Die Divisoren $\rho_2^2, \rho_3^2, \rho_4^2$ finden ihre Erklärung in dem auch hier geltenden Gesetze:

$$N_1 N_{\mathrm{II}} = \frac{-4acn^2}{\rho_1^2} \text{ und } N_{\mathrm{III}} N_{\mathrm{IV}} = \frac{-4acn^2}{\rho_{\mathrm{III}}^2} \ldots \mathrm{XII}b.$$

§. 16.

Kommen in D die Primfactoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ singulär vor, und ist jener ein Theiler von a, dieser aber ein Theiler von c, so kann man jene zwei Primzahlen streichen und bloss den Nenner N_1 suchen und benützen, in welchem, der obigen Darstellung gemäss $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ nicht vorzukommen brauchen; dadurch wird die Zahl der Versuche viermal kleiner.

Wäre $v^2-aw^2 = N_1$ in ganzen theilfremden Zahlen möglich, eine der drei andern äquivalenten Gleichungen mit den Zahlengliedern N_{II}, N_{III}, N_{IV} jedoch unmöglich, so wäre die erste Gleichung unbrauchbar; und wenn sich vier derartige Gleichungen, wie es die erste ist, nicht bilden lassen, so ist die Gleichung I unmöglich; doch darf man aus dem Bestehen jener vier Gleichungen auf die Möglichkeit von I nicht schliessen. [1]

Hätte man den Bruch in VIII durch μ^2 gehoben, so müsste in XIIb die Stammzahl $-4acn^2$ durch μ^4 dividirt werden.

Wird die Lösung einer der äquivalenten Gleichungen dadurch erschwert, dass das Zahlenglied ein Product mehrerer Primzahlen ist, so zerlege man dieses Glied in zwei Factoren ($N = n_{\mathrm{I}} n_{\mathrm{II}}$), für welche $v_1^2 = aw_1^2 + n_1$ und $v_{\mathrm{II}}^2 = aw_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{II}}$ in Rationalzahlen möglich sind, bestimme aus den Auflösungen dieser Gleichungen die Unbekannten der Gleichung $v^2 = aw^2 + N$ mittelst der Formeln

$$w = v_1 w_{\mathrm{II}} \mp v_{\mathrm{II}} w_1 \text{ und } v = v_1 v_{\mathrm{II}} \mp aw_1 w_{\mathrm{II}}$$

und finde, wenn dies Brüche sein sollten, mittelst der p-Function ganze Zahlen für w und v oder ein Kriterium der Unmöglichkeit einer solchen Lösung.

Ist $-ac$ ein Quadrat, so gibt es für $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ nur zwei äquivalente Substitutionen.

§. 17.

Kommen in D quadratische Factoren vor, deren Product wir mit ν^2 bezeichnen, so dass $D = \nu^2 D_1$ ist, so lässt sich meistens eine p-Function finden, deren Nenner $v^2 - aw^2$ lediglich ein Theiler von $n_1 \nu D_1$ sein darf.

Um auf diese p-Function zu kommen, setze man in der Gleichung $K^2 = a\Delta^2 + D(\alpha^2 - a)\ldots$(V im Eingangs erwähnten Hefte ex 1878) $\alpha = \nu$, $K = \nu k$, $\Delta = \nu d$ und dividire, wenn a und ν^2 keinen quadratischen Factor gemein haben, beiderseits durch ν^2; da wird

$$k^2 = ad^2 + D_1(\nu^2 - a)\ldots(1)$$

wo d und k die Unbekannten sind. Nach Bestimmung derselben

---

[1] Weil die Gleichungen mit den Zahlengliedern N_{I} und N_{III} zugleich möglich oder zugleich unmöglich sind, und weil für N_{II} und N_{IV} dasselbe gilt, so braucht man blos N_{I} und N_{II} eventuell N_{I} und N_{IV} nebst XII b in Betracht zu ziehen.

erhält man

$$\beta = \frac{\nu(\pm k + b)}{2a} = \nu\eta \text{ oder } \frac{\nu}{2}\eta.$$

Ist η ein reducirter Bruch, so muss sein Nenner ein Theiler von a und prim gegen ν sein; wären nämlich a und ν durch μ theilbar, so müssten b wegen $D = \nu^2 D_1$, und k wegen (1) es auch sein, und in dem obigen Ausdrucke für β bliebe, beim Abkürzen durch μ der Factor ν im Zähler intact. η kann auch Null sein.

Es wird also

$$y^2 = (\nu x + \nu\eta)^2 + (\gamma x - \delta)(n_1 x - m_1) \ldots (2),\ x = \frac{m_1}{n_1},\ y = \frac{\nu r_1}{n_1}$$

und

$$n_1 x = m_1 + \frac{2\nu r_1 p_1 + l}{p_1^2 - a};$$

weil hier $S = n_1^2 \nu^2 D_1$ ist, so muss $l = \nu l_1$ sein, somit

$$n_1 x = m_1 + \nu \frac{2 r_1 p_1 + l_1}{p_1^2 - a}.$$

Hier ist die reducirte Stz. $S_1 = n_1^2 \nu D_1$ und, wie sogleich bewiesen wird, ν prim gegen n_1, daher nach §. 8 $n_1 \nu D_1$ ein Vielfaches aller brauchbaren Werthe von $v^2 - aw^2$.

Die Zahlen ν und n_1 können desshalb als theilfremd angesehen werden, weil sonst ihr gemeinschaftliches Mass μ wegen der Determinante $\nu^2 D_1$ des auf die Form I gebrachten rechten Flügels in (2) auch ein Mass von m_1 sein müsste und daselbst im Binome $n_1 x - m_1$ herausgehoben werden könnte.

Wäre aber $a = \pi^2 a_1$ und λ das grösste gemeinschaftliche Mass von π und ν, so ist $\alpha = \frac{\pi\nu}{\lambda}$ zu setzen und die obige Gleichung V durch $(\pi\nu)^2$ zu kürzen; in der transformirten Gleichung II wird ein Werth von x ein Bruch sein, dessen Nenner durch π oder $\frac{\pi}{2}$ theilbar ist, und die aus diesem Bruche gebildete p-Function wird im Zähler den gemeinschaftlichen Factor ν haben und durch π^2 oder $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ gekürzt werden können.

Diese Transformationen können das Auffinden eines Kennzeichens für die Unmöglichkeit der Lösung in ganzen Zahlen erleichtern, weil dadurch die Menge der Factoren von S in der reducirten Stammzahl S_1 vermindert wird. [1]

§. 18.

I. Berechnung ganzzahliger Werthe von p_1.

A. Lässt sich in der Formel $\alpha = -np+\alpha_1$, zu welcher laut IV die Formel $\beta = mp+\beta_1$ gehört, eine solche ganze Zahl für p ersehen, dass $a-\alpha^2$ eine Primzahl wird, so ist die Gleichung I gelöst, sobald man sie auf die Form II gebracht hat. Dasselbe findet statt, wenn $a-\alpha^2$ das Doppelte einer Primzahl ist und dabei b nebst βc gerade Zahlen sind.

1. Exempel:

$$y^2 = 61x^2+111x-101 = (7x+8)^2+(3x+11)(4x-15),$$

$$x = -\frac{11}{3},\ \alpha = 3p+7,\ \beta = 11p+8;$$

für $p = -5$ wird

$$\alpha = -8,\ \beta = -47,\ 61-64 = -3$$

und

$$y^2 = (8x+47)^2-(3x+11)(x+210);\ x = -210,\ y = 1633.$$

2. Exempel.

$$y^2 = 67x^2-290x+244 = (12x-17)^2-(7x-5)(11x-9),$$

$$x = \frac{5}{7},\ \alpha = -7p+12,\ \beta = 5p-17;$$

für $p = 3$

wird $\alpha = -9,\ \beta = -2,\ 67-81 = -14$

und

$$y^2 = (9x+2)^2-2(7x-5)(x+24),\ x = -24,\ y = 214.$$

B. Noch der Formel

$$nx = m+\frac{2rp_1+(2am+bn)}{p_1^2-a} \ldots \text{VIII}$$

Nach Ausscheidung der unzulässigen Divisoren von D (§. 8) sind alle andern mit n zu multipliciren, diese Producte, wenn sie a nicht übersteigen, mit beiden, sonst aber nur mit dem positiven Vorzeichen dem Nenner p_1^2-a gleichzusetzen und mit den sich aus diesen Gleichungen für p_1 ergebenden ganzen Zahlen die Werthe von x nach VIII zu berechnen.

---

[1] Die bisherigen Sätze haben auch dann Geltung, wenn a negativ oder ein Quadrat ist.

3. Exempel:

$$y^2 = 156x^2 + 447x + 127 = (9x+19)^2 + 3(5x-6)(5x+13),$$

$$D = 3.7.5741\ x = \frac{6}{5},\ y = \frac{149}{5},\ 5x = 6 + \frac{298p+4107}{p^2-156}$$

$$N = -35,\ p = 11,\ x = -41,\ y = 494.$$

C. Nach der Formel

$$nx = m + h\frac{dp+f}{p^2-a}\ldots[1]$$

in §. 8.

Ist h_1 das grösste gemeinschaftliche Mass von n und $h\,(=h_1\rho)$, so sind alle zulässigen Factoren von $\frac{D}{\rho}$ mit n zu multipliciren und hierauf wie in *B* zu verfahren.

4. Exempel:

$$23z^2 - 41xz - 44z - 17x^2 + 36x + 79 = 0,$$

für $z = \dfrac{y+41x+44}{46}$ wird

$$y^2 = 3245x^2 + 296x - 5332,\ D = 16.9.7^3.23.61,$$

$$K^2 = 3245\Delta^2 + D(\alpha^2 - 3245),$$

für $\alpha = 57$ ist 4 der Rest; setzt man der kürzeren Rechnung wegen $K = 3.7.8k$, $\Delta = 168d$ und dividirt durch 168^2, so kömmt

$k^2 = 3245d^2 + 9821$; $\Delta_1^2 = 3245\beta_1^2 + 9821\,(\alpha_1^2 - 3245)$; $\alpha_1 = 57$

und $\Delta_1^2 = 3245\beta_1^2 + 39284$; für $\Delta_1 = 3245z + r$ wird

$$\beta_1^2 = 3245z^2 + 2rz - 12 + \frac{r^2-344}{3245},\ r = 302,\ 347,\ 1128,\ 1468$$

$B = 28,\ 37,\ 392,\ 664$; für die ersten zwei Werthe von r und für $z = 0$ wird $\beta_1 = 4$ beziehungsweise 5, also

$$k^2 = (57d+5)^2 - 2(2d-31)(d+158);$$

somit

$$d = -158,\ k = -9001,\ K = -1512168,\ \beta = \frac{K+\alpha b}{2a} = -\frac{1152}{5}$$

und

$$25y^2 = (285x-1152)^2 + 4(5x+33191)(5x-11);$$

$$x = \frac{11}{5},\ y = -\frac{525}{5},\ 5x = 11 + 210\frac{-5p+347}{p^2-3245},\ S = 25\,D.$$

Hier ist $h_1 = 5$, $\rho = 42$, $\frac{D}{\rho} = 8.3.7^2.23.61$; da 3245 ein Nichtrest von 3 und 8 ist, so sind diese zwei Divisoren und im Hinblick auf den äquivalenten Nenner (§. 13, XIIa) auch 2 wegzulassen, hierauf sämmtliche Factoren der Zahl $7^2.23.61$ wie auch die Vierfachen derselben mit 5 zu multipliciren und dem Nenner gleich zu setzen. Da findet man

$$\begin{array}{rl} p = & 5,\quad 45,\quad -65 \\ x = & -2,\quad -2,\quad 31 \\ y = & 84,\qquad 1767 \\ z = & 1 \qquad\quad 67 \end{array}$$

D. Nach der Formel

$$nx = m + \frac{dp_1 + f}{p_1^2 - a_1} \ldots [2] \text{ in §. 9. } S_{,,} = \frac{n^2 D}{\mu^4} = -a_1 d^2 + f^2.$$

Die Formel [2] entstand aus VIII durch Abkürzung des dortigen Bruches mit μ^2, wobei n durch μ oder $\frac{\mu}{2}$ theilbar sein muss. Bezeichnen wir jeden der Quotienten $\frac{n}{\mu}$ und $\frac{2n}{\mu}$ mit ν, so sind alle zulässigen Divisoren von $\frac{S_{,,}}{\nu^2}$ mit ν zu multipliciren und dem Nenner $p_1^2 - a$ gleichzustellen.

5. Exempel:

$$y^2 = 639x^2 - 15x - 615 = (3x+20)^2 + 5(21x-29)(6x+7),$$

$$D = 5.9.7^2.23.31,\ x = \frac{29}{21},\ y = \frac{507}{11},$$

$$21x = 29 + \frac{1014p + 36747}{p^2 - 639};$$

für $p = 3p_1$ wird

$$21x = 29 + \frac{338p_1 + 4083}{p_1^2 - 71},\ S_{,,} = 5.7^4.23.31;$$

von den Divisoren der Zahl $\frac{S_{,,}}{7^2}$ ist bloss -1 zu brauchen; also

$p_1^2 - 71 = -7$, $p_1 = -8$, $x = -8$, $y = 201$.

E. Nach der Formel

$$nx = m + h\,\frac{d_1 p_1 + f_1}{p_1^2 - a_1},\ S'_{,,} = \frac{n^2 D}{h\mu^4} = h(-ad_1^2 + f_1^2).$$

Ist h_1 das grösste gemeinsch. Mass von h und ν, welches letztere in der obigen Bedeutung (D) zu verstehen ist, so hat man nach §. 8 sämmtliche zulässigen Divisoren von $\left(\frac{n^2D}{\mu^4\nu^2} : \frac{h}{h_1}\right)$ das ist von $\frac{h_1 S^1{}_{\prime\prime}}{\nu^2}$ mit ν zu multipliciren u. s. w.

6. Exempel:

$$y^2 = 126x^2 + 528x - 264 = (9x+10)^2 + (15x-14)(3x+26),$$

$$D = 64.9.5.11.13,\ x = \frac{14}{15},\ y = \frac{276}{15},$$

$$15x = 14 + 24\,\frac{23p+477}{p^2-126};$$

für $p = 3p_1$ wird

$$15x = 14 + 8\,\frac{23p_1+159}{p_1^2-14},\ S^1{}_{\prime\prime} = 8.5^3.11.13;$$

unter den Divisoren von $\frac{1.S^1{}_{\prime\prime}}{5^2}$ findet man als passend -2 und 55, daher

$$\begin{aligned} N &= -10, & 275 \\ p_1 &= 2, & 17 \\ x &= -10, & 2 \\ y &= 84, & 36. \end{aligned}$$

F. Nach der Formel

$$\mu n x = \mu m + \frac{2rp_1+f}{p_1^2-a_1},\quad S^1 = \frac{n^2D}{\mu^2} = -4a_1r^2+f^2 \ldots [4] \text{ in §. 11.}$$

7. Exempel:

$$y^2 = 540x^2 - 78x - 110 = (22x+3)^2 + 7(4x-17)(2x+1),$$

$$D = 4.9.7.967,\ x = -\frac{1}{2}\ y = -\frac{16}{2},\ \text{und}$$

$$2x = -1 + 4\,\frac{-8p-309}{p^2-540};$$

multiplicirt man beide Seiten mit 3 und hebt den Bruch durch 36, so wird

$$6x = -3 + \frac{-16p_1-103}{p_1^2-15},\ S^1 = \frac{4D}{16.9} = 7.967,\ N = 1,$$

$$p_1 = -4,\ x = -7,\ y = 164.$$

§. 19.

II. Berechnung gebrochener Zahlen für p_1 durch Kettenbrüche.

Kömmt für p_1 eine ganze Zahl nicht vor, so suche man dafür einen Bruch $\frac{v}{w}$, und verwandle zu diesem Ende $\sqrt{a}$ in einen Kettenbruch, was am schnellsten nach Tenner's Methode geschieht, die im nächsten Exempel dargestellt ist. Findet man unter den Nennern der vollständigen Quotienten (in der VI. Verticalreihe) die Zahl n oder ein Vielfaches, etwa das $g$fache von n und ist g ein Theiler von D, so setze man die diesen Nennern entsprechenden Näherungsbrüche, welche Auflösungen von $v^2 - aw^2 = \pm n$ beziehungsweise $= \pm gn$ sind, für p_1 $(= \frac{v}{w})$ in die Formel VIII, oder die Werthe von v und w in X ein. Kämen jedoch in der VI. Colonne weder n noch ng, wohl aber die Factoren von n $(= kl\ldots)$ vor, so berechne man aus den diesen Factoren entsprechenden Nährungsbrüchen die Auflösungen der Gleichung $v^2 - aw^2 = \pm kl\ldots$, und mache mit $\pm \frac{v}{w}$ den Versuch.

8. Exempel:

$$y^2 = 199x^2 + 97x - 20 = (7x+8)^2 + 3(5x-4)(10x+7),$$

$$D = 3.8443,\ x = -\frac{7}{10},\ y = \frac{31}{10},\ 10x = -7 + 2\frac{31p - 908}{p^2 - 199};$$

I	II	III	IV	V	VI
14	×	14	=199	—	3
9	1	13	169	30	10
2	7	7	49	150	15
1	6	8	64	135	9
2	4	10	100	99	11

u. s. f.

$$\frac{14+14}{3} = 9^1/_3,\ 14 - 1 = 13$$

$$\frac{14+13}{10} = 2^7/_{10},\ 14 - 7 = 7$$

$$\frac{14+7}{15} = 1^6/_{15},\ 14 - 6 = 8$$

In der I. Verticalreihe stehen unter 14 die Nenner der Kette und unter VI die Nenner $\mathfrak{N}$ der vollständigen Quotienten, welche Zahlenglieder der Gleichungen $v^2 = aw^2 \mp \mathfrak{N}$ sind, wo das Zeichen — für die an den ungeraden und + für die an den geraden Stellen vorkommenden Nenner zu nehmen ist.

$$\begin{array}{cccccl} 14 & 9 & 2 & 1 & 2 & \ldots\text{die Nenner des Kettenbruches;} \\ \frac{14}{1} & \frac{127}{9} & \frac{268}{19} & \frac{395}{28} & \frac{1058}{75} & \ldots\text{die Näherungsbrüche;} \end{array}$$

die Bruchglieder des zweiten sind die Auflösung der Gleichung $v^2 = 199w^2 + 10$; für $p = \frac{127}{9}$ wird $x = -763$ und nach IX in §. 5 ist $y = \frac{127}{9}(-763 + \frac{7}{10}) - \frac{31}{10} = -10760$.

9. Exempel:

$$y^2 = 124x^2 + 37x + 7 = \frac{1}{16}[(20x-13)^2 + (396x-19)(4x+3)]$$

$$D = -3.701,\ x = -\frac{3}{4},\ y = -\frac{28}{4},\ 4x = -3 + 4\frac{-14p-149}{p^2-124},$$

$S = 16D$; unter VI steht an der fünften Stelle 12, ein Factor von S, der fünfte Näherungsbruch $p = -\frac{412}{37}$ macht $x = -787$, $y = 8762$.

I	124	IV
11	. . .	3
7	. . .	8
2	. . .	11
1	. . .	9
1	. . .	12

10. Exempel:

$$y^2 = 46x^2 - 417x - 324 = (26x+14)^2 - 5(14x+13)(9x+8);$$

$$D = 9.5.5189,\ x = -\frac{13}{14},\ y = -\frac{142}{14},$$

$$14x = -13 + 2\frac{-142p-3517}{p^2-46},\ S_{,} = 2.49D;$$

aus dem dritten und sechsten Näherungsbruche findet man die Auflösung der Gleichung $v^2 = 46w^2 - 14$, nämlich $w = 3$, $v = 20$; für $p = \frac{20}{3}$ wird $x = 409$, $y = -2743$.

1	46	VI
6	. . .	10
1		3
3	. . .	7
1		6
1	. . .	5
2		2

Oder: $x = -\frac{8}{9}$, $y = -\frac{82}{9}$, $9x = -8 + \frac{-164p-4489}{p^2-46}$;

der zweite Näherungsbruch ist $\frac{7}{1}$, er löst die Gleichung

$$v_1^2 - 46w_1^2 = 3,$$

also entspricht der Gleichung

$$v^2 - 46w^2 = 9,\ w = 14,\ v = 95;$$

für $p = \frac{95}{14}$ wird $x = -13556$, $y = 91972$.

§. 20.

Ist $a = \mu^2 a_1$ und der Bruch in VIII durch μ^2 gehoben; so hat man $\sqrt{a_1}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln und diesen mit Rücksicht auf $S_{,,}$ zu benützen.

11. Exempel:

$$y^2 = 351x^2 + 358x - 697 = (27x+43)^2 - 2(7x+19)(27x+67),$$

$$D = 64.17293,\ x = -\frac{67}{27},\ y = -\frac{648}{27},$$

$27x = -67 + 216\frac{-6p-173}{p^2-351}$, $S_1 = \frac{27D}{8}$;

I	351	VI
18	. . .	27

$p = 18$ entspricht nicht; ebenso wenig der eilfte Näherungsbruch (an der eilften Stelle in VI steht auch 27).

Für $p = 3p_1$ wird $27x = -67 + 24\frac{-18p_1-173}{p_1^2-39}$;

$S'_{,,} = 3.8.17293$,

I	39	VI
6	. . .	3
4	. . .	1
12	. . .	3
4	. . .	1

für $p_1 = -\frac{306}{49} \ldots + \frac{306}{49}$ (der dritte Näherungsbruch) wird

$x = 43103 \qquad 203039$

$y = 807544 \qquad 3803944 = \frac{3.306}{49}(203039 + \frac{67}{27}) + \frac{648}{27}$

nach IX in §. 5.

§. 21.

Ist $x = \frac{m}{n}$ und kommen in der VI. Spalte weder n, noch ein Multiplum, noch die Factoren von n vor, so suche man für x einen Bruch, dessen Nenner auf eine dieser Arten in der VI. Reihe repräsentirt ist.

Nach IV ist $\alpha = -np + \alpha_1$, $\beta = mp + \beta_1$ und nach VI:

$$x = \frac{(\beta^2 - c):m}{(\alpha^2 - a):n} = \frac{mp^2 + 2\beta_1 p + \delta}{np^2 - 2\alpha_1 p + \gamma};$$

lässt man hier p die ersten Glieder der natürlichen Zahlenreihe, eventuell auch die der harmonischen Reihe (Schluss des §. 2) mit beiden Vorzeichen durchlaufen, so kommt man häufig auf einen solchen Werth von

$$x\left(= \frac{fm_1}{fn_1} = \frac{m_1}{n_1}\right),$$

dass der Nenner n_1 in einer der oben bezeichneten Weisen in der VI. Colonne vertreten ist.

12. Exempel:

$y^2 = 294x^2 + 371x + 120 = 25 + (14x + 5)(21x + 19)$,

$D = -49.71$, $x = -\frac{5}{14}$, $\alpha = -14p$, $\beta = -5p + 5$,

$$x = -\frac{5p^2 - 10p - 19}{14p^2 - 21};$$

I	294	VI
17	. . .	5
6	. . .	25

für $p=-2$ wird

$$x=-\frac{21}{35}=-\frac{3}{5}, \quad \alpha=28, \quad \beta=15 \text{ und}$$

$$y=\frac{-3.28+5.15}{5}=-\frac{9}{5}; \text{ somit } 5x=-3+\frac{-18p_1+91}{p_1^2-294}$$

für $p_1=17$ (der erste Näherungsbruch) wird $x=8$, $y=148$.

$$\text{Oder: } x=-\frac{5}{14}, \; y=\frac{70}{14}, \quad 14x=-5+14\,\frac{10p+161}{p^2-294}=$$

$$-5+2\,\frac{10p_1+23}{p_1^2-6}, \; S'_{\prime\prime}=-2.71$$

$p_1=-\frac{22}{9}$ (der dritte Näherungsbruch

I	6	VI
2	. . .	2
2	. . .	1
4	. . .	2

aus der zweiten Periode) macht $x=8$.

13. Exempel:

$$y^2=637x^2+575=(25x+5)^2+2(3x-55)(2x-5),$$

$$D=-4.5^2.7^2.13.23, \quad x=\frac{55}{3}, \; \alpha=-3p+25, \; \beta=55p+5,$$

$$x=\frac{55p^2+10p-10}{3p^2-50p-4}, \; p=-\frac{1}{3}, \; x=-\frac{65}{117}=-\frac{5}{9}$$

$$\alpha=26, \; \beta=-\frac{40}{3}, \; y=-\frac{250}{9} \text{ und}$$

$$9x=-5+10\,\frac{-50p_1-637}{p_1^2-637};$$

I	637	VI
25	. . .	12
4	. . .	9
5	. . .	17

für $p_1=-\frac{101}{4}$ (der zweite Näherungsbruch) wird $x=1235$, $y=31170$.

§. 22.

Wenn $a=\mu^2 a_1$, $x=\frac{m}{n}$ und n prim gegen μ ist, in Folge dessen der Bruch in VIII durch μ^2 nicht gehoben werden kann (§. 9), so lässt sich die Theilbarkeit dadurch herbeiführen, dass man die Congruenz $-np+\alpha_1\equiv 0 \pmod{\mu}$ nach p auflöst, hierauf $\alpha=-np+\alpha_1$ möglichst nahe an $\sqrt{a}$ bestimmt, dessgleichen $\beta=mp+\beta_1$, die Differenz $(\alpha x+\beta)^2-(ax^2+bx+c)$ durch $nx-m$ dividirt und aus dem Quotienten die neue p-Function bildet.

Im letzten Exempel ist $637 = 7^2.13, x = \frac{5}{2}, \alpha = -2p+25$, $\beta = 5p+5$; also $-2p+25 \equiv 0 \pmod{7}$, daraus $p = 7q+2$, $\alpha = -14q+21$, $\beta = 35q+15$, für $q=0$ wird $\alpha = 21$, $\beta = 15$, $(21x+15)^2 - (637x^2+575) = -14(14x^2-45x+25)$; dividirt man dieses Trinom durch $2x-5$, so ist $7x-5$ der Quotus,

$$x = \frac{5}{7},\ y = \frac{210}{7} \text{ und } 7x = 5+10\,\frac{42p+637}{p^2-637} =$$

$$5+10\,\frac{6p_1+13}{p_1^2-13},\ S'_{,,} = -10.13.23$$

I	13	VI
3	. . .	4
1	. . .	3
1	. . .	3
1		4
1	. . .	1

für $p_1 = \frac{18}{5}$ (der fünfte Näherungsbruch) wird $x = -1235$.

§. 23.

III. Berechnung gebrochener Zahlen für p_1 mittelst Gleichungen.

Führt auch der Kettenbruch nicht zum Ziele, was bei Anwendung der bisher gebotenen Mittel (darunter §. 21) gemeiniglich nur dann eintritt, wenn $a-1$ ein Quadrat, oder wenn die Lösung der Gleichung I in ganzen Zahlen unmöglich ist, so muss man zur Aufstellung von Gleichungen schreiten, welche die Form $v^2 = aw^2+N\ldots(1)$ haben und in ganzen, theilfremden Zahlen auflöslich sein sollen. Wäre $a = \mu^2 a_1$ und der Bruch in VIII durch μ^2 gehoben worden, so sind Gleichungen von der Form $v^2 = a_1 w^2 + N^1$ zu construiren.

Für N und N^1 dürfen versuchsweise nur jene Factoren von S respective $S_{,,}$ in steigender Ordnung gesetzt werden, welche nach den in §. 18 angegebenen Regeln gebildet sind. Auch darf für N keine unter $\sqrt{a}$ liegende Zahl genommen werden, welche unter den Nenner der vollständigen Quotienten (VI. Verticalreihe, §. 19) fehlt, weil sonst (1) in relativen Primzahlen unmöglich wäre. Dasselbe gilt für N^1 bezüglich $\sqrt{a_1}$.

Jede in dieser Rechnung vorkommende unbestimmte Gleichung des zweiten Grades ist hinsichtlich ihrer Möglichkeit in ganzen Zahlen der Probe auf die quadratischen Achterreste ihrer Seiten zu unterziehen, und bei Gleichungen von der Form I ist im vorhinein zu untersuchen, ob das Zahlenglied ein quadratischer Rest des grössten gemeinschaftlichen Masses der zwei andern Coëfficienten ist.

Ist in I b von Null verschieden und $v^2 = aw^2 + N \ldots (1)$ in relativen Primzahlen möglich, so muss $v^2 = aw^2 + \frac{S}{N}$ es auch sein (§. 14); ist aber $b = 0$ und (1) möglich, so müssen noch drei ähnliche Gleichungen in relativen Primzahlen auflöslich sein, weil sonst (1) unbrauchbar wäre (§. 16).

Die Auflösung der Gleichung (1) kann im Möglichkeitsfalle auf zweierlei Art erfolgen.

1. Für $v = az + r$ wird.

$$w^2 = az^2 + 2rz + \frac{r^2 - N}{a};$$

von den 2μ incongruenten Wurzeln der Congruenz $r^2 \equiv N \pmod{a}$ setze man die ersten μ Wurzeln für r in die letzte Gleichung ein, wodurch ein System von μ unbestimmten quadratischen Gleichungen entsteht. Für jede der letzteren finde man mittelst der Achterreste, welche von den Formen $8n + (1, 3, 2, 4, 0)$ die Unbekannte z haben kann, und ermittle hierauf durch Versuche eine solche Zahl für z, welche einer dieser Gleichungen Genüge leistet. Dabei versuche man für z nur solche Zahlen, von denen das bekannte Glied ein quadratischer Rest ist, und meide Substitutionen, bei denen eine Primzahl in zwei Gliedern potenzirt im dritten aber singulär vorkäme.

2. Man berechne aus der unbestimmten Gleichung

$$\Delta^2 = a\beta^2 + N(\alpha^2 - a) \ldots \mathrm{IV}_1 \text{ ex } 1878$$

für einen beliebigen Werth von α jenen von β mittelst des Satzes $\Delta = az + r$ auf die eben angegebene Weise, bringe hierauf die Gleichung (1) auf die Form II, und benütze, falls es noch nöthig wäre, eine p-Function.

Ist die Gleichung I, in der b auch Null sein kann, in ganzen Zahlen möglich, so entsprechen jedem ganzzahligen α unzählige ebenso beschaffene β (wegen III), und ist $a - \alpha^2$ eine Primzahl und ein ganzzahliges β gefunden, so liefert die Form II für x

wenigstens Eine ganze Zahl. Um aber für β eine ganze Zahl zu finden, ist es rathsam, die Gleichung

$$K^2 = a\Delta^2 + D(\alpha^2 - a) \ldots \text{V ex } 1878$$

beziehungsweise die obige unter IV_1 nicht auf Grund willkürlicher Annahmen mittelst Division ihrer Glieder durch Quadrate abzukürzen. Würde trotzdem eine dieser zwei Gleichungen in ganzen Zahlen unmöglich, so ist auch I unauflöslich. Dieser Vorgang wird mühsam und abschreckend, wenn der Werth von z weitab vom Ausgangspunkte der Versuche liegt, daher man letztere nicht ausdehne, sondern lieber mit Verzicht auf die Primzahl für α eine andere, etwa solche Zahl setze, für welche $\alpha^2 - a$ eine der ersten in der VI. Verticalreihe stehenden Zahlen oder ein Multiplum einer solchen wird (§. 19).

Lässt sich ein Werth von β nicht leicht finden, so bediene man sich, wenn b nicht Null und c nicht gross ist, der Gleichung

$$L^2 = c\Delta^2 + D(\beta^2 - c) \ldots \text{VI ex } 1878$$

und setze hier für β nur Theiler von c. Hat man L bestimmt, so wird α nach der Formel

$$\alpha = \frac{\pm L + b\beta}{2c}$$

berechnet. Ist $b = 0$, so hat man die einfachere Formel

$$\Delta^2 = c\alpha^2 + a(\beta^2 - c) \ldots \text{IV}_{,,} \text{ ex } 1878$$

zu benützen und für β Divisoren von c zu nehmen.

Endlich kann man versuchen, die Gleichungen V respective IV_I ex 1878 auf die im letzten Absatze des §. 16 angegebene Weise in Rationalzahlen zu lösen.

Von den die Gleichung (1) befriedigenden Zahlen probire man nicht nur Ein Paar in der Formel VIII oder X, sondern man versuche einige innerhalb der ersten Periode liegenden Werthe von w und v, ehe man weiter geht.

Die hier angegebenen Methoden führen überraschend schnell zur Auflösung der Gleichungen oder zu einem Kennzeichen der Unmöglichkeit einer Lösung in ganzen Zahlen.

§. 24.

14. Exempel:

$$y^2 = 194x^2+63x+479 = (5x-21)^2+(13x+2)(13x+19),$$

$$D = -5.73547 \quad x = -\frac{2}{13},\ y = -\frac{283}{13},$$

$$13x = -2+\frac{-566p+43}{p^2-194};$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & 194 & \mathrm{VI} \\ 13 & & 25 \\ 1 & \ldots & 2 \\ 12 & & 25 \\ 1 & \ldots & 1 \end{array}$$

streicht man nach §. 14 den grösseren Factor in D, so sind ± 65 die allein möglichen Zahlenglieder; also

$$v^2 = 194w^2+65 = (14w+1)^2-2(w-2)(w+16)$$

und $v = 29$, respective 223;

diese Zahlen entsprechen nicht. Also

$$v^2 = 194w^2-65 = (14w+1)^2-2(w+3)(w+11),\ v = 41$$

beziehungsweise 153; für $p = -\frac{41}{3}$ oder $\frac{153}{11}$ wird

$x = -83$ oder 1121, $y = 1154$ respective 15616.

Nach §. 21 ist für

$$x = -\frac{2}{13} \quad \alpha = -13p+5,\ \beta = -2p-21,$$

$$x = -\frac{2p^2+42p-19}{13p^2-10p-13};$$

für $p = +1$ ist

$$x = \frac{5}{2},\ \alpha = -8,\ \beta = -23,\ y = \frac{86}{2},\ 2x = 5+2\,\frac{86p+1033}{p^2-194},$$

$$S_1 = -2D,\ p = -14 \text{ und } 14,\ x = -83, \text{ respective } 1121.$$

Oder:

$$K^2 = 194\Delta^2-D(\alpha^2-194),\ \alpha = 14,\ K^2 = 194\Delta^2-735470,$$

$$K = 194z+r,\ \Delta^2 = 194z^2+176z+3831,\ z = 11,\ \Delta = 171,$$

$$K = 2222,\ \beta = 8,\ y^2 = (14x+8)^2-(2x-5)(x+83).$$

15. Exempel:

$$y^2 = 290x^2 + 199x - 123 = (15x+9)^2 + (5x-12)(13x+17)$$
$$D = 11.73.227.$$

In der VI. Reihe stehen lauter Einser.

$$x = \frac{12}{5},\ y = \frac{225}{5},\ \text{also } 5x = 12 + 5\frac{90p+1591}{p^2-290},\ S_1 = 5D,$$
$$v^2 = 290w^2 - 4015 = (17w+7)^2 + (w+16)(w-254);$$
$$v = 265, \text{ respective } 4325;$$

für $p = -\frac{265}{16}, \frac{4325}{254}$ wird

$$x = -4 \text{ respective } -50188,\ y = 61, \text{ respective}$$
$$\frac{4325}{254}\left(-50188 - \frac{12}{5}\right) - \frac{225}{5} = -854665.$$

Die Gleichung

$$v^2 = 290w^2 + 4015 = (17w+16)^2 + (w-7)(w-537)$$

führt auf $p = \frac{135}{7}$, $x = 43$, $y = 738$. Die äquivalenten Gleichungen $v^2 = 290w^2 \pm 5.227$ leisten dasselbe.

§. 25.

IV. Gleichungen, die in gebrochenen, nicht aber in ganzen Zahlen möglich sind, nebst den betreffenden Kriterien.

1. Exempel:

$$y^2 = \underset{1}{113}x^2 + \underset{4}{460}x + \underset{6}{22};$$

die Achterreste der Constanten sind 1, 4, 6; für

$$x = 8n \pm (1, 3, 2, 4, 0)$$

lässt die rechte Seite der Gleichung beziehungsweise die Achterreste ± 3, ± 2, welche Zahlen quadratische Nichtreste von 8 sind; folglich kann x keine ganze Zahl sein.

2. Exempel:

$$y^2 = 18x^2 + 21x - 13;$$

der rechtsseitige Dreierrest ist -1, ein Nichtrest von 3.

3. Exempel:

$$y^2 = 79x^2+24x+2,\ D = -56,\ K^2 = 79\Delta^2-56(\alpha^2-79),$$

für $\alpha = 9$ wird das Zahlenglied -112; da 79 ein Nichtrest von 4 ist, so muss durch 16 dividirt werden; also $K_1^2 = 79\Delta_1^2-7$, in ganzen Zahlen unmöglich; somit existirt hier kein ganzzahliges β und nach §. 23, Absatz 2, auch keine ganze Zahl für x.

4. Exempel:

$$x^2 = 101x^2+19 = (x+5^2)+2(10x-3)(5x+1);$$

$$5x = -1+2\frac{24p-101}{p^2-101},\ S_1 = -2.19.101.5^2;$$

streicht man 19 und 101 nach §. 16, so bleibt für das Zahlenglied N bloss 10, womit sich keine in ganzen Zahlen mögliche Gleichung bilden lässt.

5. Exempel

$$y^2 = 170x^2+134x+69 = (11x+8)^2+(7x-5)(7x-1),$$

$$D = -4.13.557,\ x = \frac{1}{7},\ y = \frac{67}{7},\ 7x = 1+2\frac{67p+639}{p^2-170},$$

$$S_1 = -2.13.557.7^2;$$

nach Wegfall von 557 hat man die Gleichungen

$$v^2 = 170w^2\mp7(1,\ 2,\ 13,\ 26),$$

welche insgesammt unmöglich sind, weil 7 ein Nichtrest, jede in den Klammern stehende Zahl aber ein Rest von 17 ist.

6. Exempel:

$$y^2 = 145x^2+20x-19 = (10x+1)^2+5(3x+2)(3x-2);$$

$$3x = 2+2\frac{23p+320}{p^2-145},\ S_1 = 3^2.2.5(571);$$

streift man den eingeklammerten Factor ab, so können in Betracht kommen: $v^2 = 145w^2\mp15$, in rationalen Zahlen unmöglich; und $v^2 = 145w^2\mp30$ der 8-Reste wegen in ganzen Zahlen unmöglich.

7. Exempel:

$$y^2 = 79x^2-14 = (3x+2)^2+2(7x+3)(5x-3),$$

$$5x = 3+2\frac{19p+237}{p^2-79},\ S_1 = 5^2.4.(7.79)$$

löscht man 7 und 79, so bleibt

$$v^2 = 79w^2 + 10,\ \Delta^2 = 79\beta^2 + 10(\alpha^2 - 79),\ \alpha = 9$$

und durch 4 dividiren: $\Delta_1^2 = 79\beta_1^2 + 5$ in ganzen Zahlen unmöglich.

8. Exempel:

$$y^2 = 79x^2 + 7.2399 = (10x+53)^2 - (3x+184)(7x-76);$$

$$7x = 76 + 2\frac{1131p + 6004}{p^2 - 79}\ S_1 = -2.7^3(79.2399);$$

hier kommen in Betracht:

$$v^2 = 79w^2 \mp 7(1,\ 2,\ 7,\ 14);\ N = -7$$

ist wegen der VI. Verticalreihe und $N = -14$ laut 7. Exempels unbrauchbar;

$$v^2 = 79w^2 + 49,\ w = 0,\ v = 7,\ w = 14\frac{p_1}{p_1^2 - 79},\ S_1 = -14(79);$$

hier soll N ein 7faches sein; $N = -7$ und -14 sind aber unzulässig; endlich

$$v^2 = 79w^2 + 98 = 81w^2 - 2(w^2 - 49),\ w = 7,\ v = 63,$$

$$w = 7 + 14\frac{9p_{,,} + 79}{p_{,,}^2 - 79},\ S_1 = -4.7.(79),$$

auch hier sollte N den Factor 7 enthalten, was unmöglich ist.

9. Exempel:

$$y^2 = 79x^2 + 219x + 129 = (11x+8)^2 - (6x+5)(7x-13),$$

$$D = 3.2399,\ x = \frac{13}{7},\ y = \frac{199}{7},\ 7x = 13 + \frac{398p + 3587}{p^2 - 79},$$

$$S = 3.\ 7^2.(2399);$$

die Auflösungen der Gleichung $v^2 = 79w^2 + 21$ entsprechen nicht; die äquivalente Gleichung $v^2 = 79w^2 + 7.2399$ ist laut 8. Exempels unmöglich, daher ist I in ganzen Zahlen nicht zu lösen.

10. Exempel:

$$y^2 = 79x^2 + 3.2399,\ \Delta^2 = 79\beta^2 + 3.2399(\alpha^2 - 79),\ \alpha = 9,$$

$$\Delta^2 = 79\beta^2 + 6.2399,\ 6.2399 = -6.-2399,\ \text{also}$$

$$\Delta_1^2 = 79\beta_1^2 - 6\ \text{und}\ \beta_1 = \frac{1}{3},\ \Delta_1 = \frac{5}{3};$$

ferner

$$\Delta_{,,}^2 = 79\beta_{,,}^2 - 2399 \text{ und } \beta_{,,} = 15,\ \Delta_{,,} = 124,$$

somit nach dem letzten Absatz in §. 16

$$\beta = \frac{49}{3},\ \Delta = \frac{565}{3} \text{ und } 3\beta = 49 + 2\,\frac{565p + 3871}{p^2 - 79},$$

$$S_1 = -4.3^3(79.2399);$$

in den Gleichungen $v^2 = 79w^2 \mp 3\,(1,\ 2,\ 3,\ 6)$ sind die Zahlenglieder 3 und 6 wegen der VI. Verticalreihe unzulässig; 9 und 18 führen zu Auflösungen in relativ zusammengesetzten Zahlen; folglich gibt es für β und x keine ganzen Zahlen (8. Absatz im §. 23).

11. Exempel:

$$y^2 = 386x^2 + 538x + 193 = (10x + 9)^2 + 2(11x + 7)(13x + 8),$$

$$D = -4.2137,\ 11x = -7 + 2\,\frac{29p + 257}{p^2 - 386},$$

$$S_1 = -2.11^2(2137);$$

da $v^2 = 386w^2 \mp 22$ in rationalen Zahlen unmöglich sind, so gibt es keine ganzen Zahlen für x.

12. Exempel:

$$y^2 = 291x^2 + 115x + 461 = (14x - 11)^2 + (5x + 17)\,(19x + 20);$$

$$D = -17^2.1811,\ 5x = -17 + \frac{-586p - 9319}{p^2 - 291},$$

$$S = -5^2.17^2(1811);$$

für $N = 85$ und -85.1811 findet man unpassende Werthe für p, und für $N = -5.17^2$ eine unmögliche Gleichung.

Nun bilde man nach §. 17 eine p-Function, deren Nenner den Factor 17^2 nicht enthalten darf.

$$K^2 = 291\Delta^2 - 17^2.1811(\alpha^2 - 291),\ \text{für } \alpha = 17,\ K = 17k,$$

$\Delta = 17d$ wird $k^2 = 291d^2 + 3622$; für $k = 291z + r$ wird

$$d^2 = 291z^2 + 2rz - 12 + \frac{r^2 - 130}{291},\quad \begin{matrix} r = 79,\ 115 \\ B = 21,\ \ 45 \end{matrix}$$

für $r = 79$ wird das Zahlenglied $-12 + 21 = 9$, somit für $z = 0$

$$d = 3,\ k = 79,\ K = \pm 1343,\ \beta = \frac{17}{3} \text{ und}$$

$$9y^2 = (51x + 17)^2 + (6x - 193)(3x - 20),$$

somit $3x = 20+17\frac{42p+705}{p^2-291}$, $S_1 = -17.9(1811)$;
hier können bloss die Gleichungen $v^2 = 291w^2 \pm 51$ aufgestellt werden, welche in Rationalzahlen unmöglich sind.

13. Exempel:

$$y^2 = 257x^2+53x+10 = (6x-2)^2+(17x+2)(13x+3),$$

$$D = -31.241,\ 13x = -3+\frac{-88p-853}{p^2-257},$$

$$S = -13^2.241(31);$$

da in der VI. Reihe lauter Einser stehen, so kann nach Wegfall von 31 der Nenner N_1 nur ± 13.241 sein. Ist $v^2 = aw^2-1$ in ganzen Zahlen möglich, so sind die Gleichungen $v^2 = aw^2 \pm N$ in ganzen Zahlen zugleich möglich oder zugleich unmöglich. Also

$$v^2 = 257w^2+3133 = (15w+30)^2+(8w-203)(4w-11) \text{ und}$$

$$4w = 11+2\frac{285q+2827}{q^2-257},\ S = -64.241.(13.257);$$

der zu bildende Nenner N^1 muss durch 8 theilbar sein, denn $v_1^2 = 257w_1^2+4.241$ ist in theilfremden Zahlen der 8-Reste wegen nicht möglich; N^1 darf aber kein Vielfaches von 16 sein, weil sonst für den nächsten äquivalenten Nenner (§. 15) nur 4 verbliebe. Somit

$$v_1^2 = 257w_1^2+8.241 = (15w_1+16)^2+8(2w_1-19)(2w_1-11) \text{ und}$$

$$2w_1 = 11+2\frac{197r+2827}{r^2-257},\ S = -128(241.257);$$

da die eingeklammerten Zahlen ausser Betracht kommen, und für den nächsten äquivalenten Nenner 8 zu reserviren ist, so bleiben für den ersten Nenner bloss 8 oder 16 übrig, mit denen keine in relativen Primzahlen auflösliche Gleichung gebildet werden kann. Die erste Gleichung ist somit in ganzen Zahlen unmöglich.

Die im theoretischen Theile dieses Schriftchens entwickelten Sätze, ermöglichen sonach eine rasche Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen, wie auch die Ermittlung von Kriterien für die Unmöglichkeit einer solchen Lösung.
