Praktische Methode zur numerischen Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in rationalen Zahlen.

Von Prof. **Adolf Kunerth.**

Setzt man in der vollständigen Gleichung $Ax^2+Bxz+Cz^2+Dx+Ez+F=0$ die Unbestimmte $z=\frac{y-(Bx+E)}{2C}$, so nimmt sie nach vollzogener Reduction die Form

$$y^2=ax^2+bx+c \tag{I}$$

an, und geht für $x=\frac{u-b}{2a}$ in die Gleichung $u^2=4ay^2+b^2-4ac$ über, an welcher sich die Möglichkeit ihrer Auflösung in Rationalzahlen auf die bekannte Weise untersuchen lässt.

Ist eine solche Lösung möglich, so kann der rechte Flügel der Gleichung I auf beliebig viele Arten in einen Ausdruck von nachstehender Form verwandelt werden:

$$y^2=ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2+(\gamma x+\delta)(\varepsilon x+\zeta) \tag{II}$$

und jede solche Transformation liefert zwei Werthe für x, aus denen sich andere finden lassen. Die griechischen Buchstaben bezeichnen ganze oder gebrochene Zahlen.

Sind $x=\frac{m}{n}$ und $y=\frac{r}{n}$ zwei bekannte, die Gleichung I befriedigende Werthe, so gestaltet sich diese für $\gamma=n$ und $\delta=-m$ nach Einsetzen jener Brüche also:

$$\frac{r^2}{n^2}=\left(\alpha.\frac{m}{n}+\beta\right)^2 \quad \text{oder} \quad r=m\alpha+n\beta \tag{III}$$

und aus dieser unbestimmten Gleichung können die Unbekannten α und β und hierauf aus II ε und ζ bestimmt werden. Zu jedem rationalen α gehört ein eben solches β und umgekehrt; weil aber für m, n und r unzählig viele Gruppen von Zahlen existiren, so entsprechen, wenn man letztere drei Grössen unbestimmt sein lässt, jeder für α oder β willkürlich gesetzten Zahl unzählige Werthe von β respective α, und dieser Umstand ermöglicht die relativ leichte Auffindung irgend eines solchen Werthes und damit die Lösung der vorgelegten Gleichung.

Soll jedoch die in II vorschriebene Transformation ausgeführt werden, ohne einen entsprechenden Werth von x zu kennen, so bringe man in II das Glied $(\alpha x+\beta)^2$ nach links, und weil in der so geformten Gleichung

$$(a-\alpha^2)x^2+(b-2\alpha\beta)x+(c-\beta^2)=(\gamma x+\delta)(\varepsilon x+\zeta)$$

die linke Seite ein Product zweier lineären Factoren werden soll, so muss ihre Determinante ein Quadrat sein; also

$$(b-2\alpha\beta)^2-4(a-\alpha^2)(c-\beta^2)=\Delta^2,$$

oder

$$\Delta^2=4(a\beta^2-b\alpha\beta+c\alpha^2)+b^2-4ac \tag{IV}$$

eine in ganzen Zahlen mögliche Gleichung, weil (III) eine solche ist.

Schreibt man hier D für b^2-4ac (die Determinante in I) und schafft das zweite Glied $-b\alpha\beta$ weg, was auf zweierlei Weise geschehen kann, so folgt

$$\text{für } \beta=\frac{K+b\alpha}{2a} \quad \ldots\ldots \quad K^2=a\Delta^2+D(\alpha^2-a) \tag{V}$$

und

$$\text{für } \alpha=\frac{L+b\beta}{2c} \quad \ldots\ldots \quad L^2=c\Delta^2+D(\beta^2-c) \tag{VI}$$

Diese zwei Gleichungen sind wegen der Beschaffenheit von (I) und (III) für jeden rationalen Werth von α respective β in eben solchen Zahlen möglich, was sich auch aus ihrer Form und den Beziehungen von a und c zu D ergibt, welche aus der in ganzen Zahlen möglichen Gleichung (IV) sogleich zu ersehen sind, wenn daselbst erst α und dann β gleich Null gesetzt werden. Zu jedem Werthe einer dieser Variablen gehören unzählige Werthe der in K respective L steckenden zweiten, von denen man einen oder den andern, er mag eine ganze oder eine gebrochene Zahl sein, mittels einiger Versuche aus (V) oder (VI) oder aus einer der Gleichungen findet, die sich aus diesen zweien ableiten lassen.

Wählt man zur Rechnung die Gleichung (V), so ist der Grösse α ein solcher Werth zu ertheilen, dass $\alpha^2 - a$ möglichst klein, oder eine Quadratzahl, die auch ein Bruch sein darf, oder ein Multiplum eines Quadrates werde, zu dessen Bildung auch D beitragen kann; durch dieses Quadrat, etwa λ^2, dividire man mit Einbeziehung von a beide Seiten der Gleichung V, welche dadurch, wenn wir hier a von dieser Division unberührt bleiben lassen und

$$K = \lambda k, \ \Delta = \lambda d, \ D(\alpha^2 - a) = \lambda f \text{ setzen, in } k^2 = ad^2 + f \qquad \text{(VII)}$$

übergeht.

Das Abkürzen durch λ^2 hat nur den Zweck, die Rechnung in kleineren Zahlen zu führen; weil aber durch die Annahme des gemeinschaftlichen Factors λ in den Grössen K oder L und Δ die Lösungen der Gleichungen (V) oder (VI) in theilfremden Zahlen ausgeschlossen und dadurch die Chancen der schnellen Auffindung eines entsprechenden Werthes vermindert werden, so kann, falls die Achterreste eine Lösung in ganzen Zahlen als möglich erscheinen lassen, D keine grosse Zahl und λ einziffrig ist, die Division durch λ^2 auch unterbleiben, oder erst dann successive durch die quadratischen Factoren von λ^2 erfolgen, wenn das Suchen nach relativen Primzahlen fruchtlos sein sollte.

Dieses Verfahren empfiehlt sich besonders dann, wenn a oder c negativ und daher die Anzahl der in ganzen Zahlen etwa möglichen Lösungen von (V) oder (VI) eine begrenzte ist; in diesem Falle durchforsche man den ganzen Zahlenraum, in welchem Wurzeln der Gleichung liegen können, wofern dies nicht zu viele Versuche erfordert.

Bezüglich der Gleichungen (V) und (VI) ist noch zu bemerken, dass, wenn die Gleichung, aus welcher sie gebildet wurden, in ganzen Zahlen möglich ist, zu jedem ganzzahligen α unendlich viele eben solche β gehören, aber nicht umgekehrt; denn alsdann ist

$$x = \frac{m}{n} = \frac{m}{1}, y = \frac{r}{n} = \frac{r}{1}$$

und (III) geht in $r = m\alpha + \beta$ über; da m und r unzählig viele Paare ganzer Zahlen bezeichnen und für jedes solche Paar der Grösse α jeder Werth aus der natürlichen Zahlenreihe, positiv oder negativ genommen, ertheilt werden kann, so entsprechen jedem ganzzahligen α unendlich viele eben so beschaffene Werthe von β und somit auch von $K = 2a\beta - b\alpha$; dagegen darf für ein besonderes Paar vom m und r der Werth von β nicht willkührlich angenommen werden, wenn α und dem zufolge auch L ganze Zahlen werden sollen. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, mittels der Gleichung (V) eher auf ein ganzzahliges K zu stossen, grösser als die, mittels (VI) auf ein ganzzahliges L, und insofern gebührt der Gleichung (V) der Vorzug; doch kann in besonderen Fällen, wenn (V) den Dienst versagt, wie auch wenn c negativ oder kleiner als a ist, es vortheilhaft sein, sich der Gleichung (VI) zu bedienen.

Um die Lösungsversuche mit kleineren und passenden Zahlen zu machen, setze man in (VII) $k = az + r$ und bestimme für die so erhaltene Gleichung

$$d^2 = az^2 + 2rz + g + \frac{r^2 - h}{a}$$

die Werthe von r aus der Congruenz $r^2 \equiv h\,(mod\,a)$; von den 2μ Wurzeln derselben setze man blos die erste Hälfte für r in die letzte Gleichung ein, und untersuche in jeder der so entstandenen μ Gleichungen, deren Repräsentant

$$d^2 = az^2 + 2rz + p \qquad \text{(VIII)}$$

ist, mittels der Achterreste, welche von den Zahlenformen $2n+1$, $4n+2$, $4n$ die Unbestimmte z annehmen dürfe, damit das letzte Trinom eine Quadratzahl werden könne; dabei sind auch in Vorhinein jene Zahlen, als für z ungeeignet, auszuscheiden, von denen das Zahlenglied p ein quadratischer Nichtrest ist.

Hierauf gebe man der Variablen z in jeder der μ Gleichungen einige auf einander folgende zulässige Werthe, und wenn keiner derselben ein Quadrat erzeugen sollte, so behandle man irgend eine dieser μ Gleichungen — die übrigen sind gemeiniglich nicht mehr nöthig — in der eben dargestellten Weise, um sie auf die in (II) stehende Form zu bringen, d. h. man suche für z einen Genüge leistenden Bruch.

Dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis man auf eine Gleichung (VIII) kömmt, die sich mit einer durch Probiren zu findenden ganzen Zahl lösen lässt, was selbst bei vierziffrigen Coefficienten, wenn nicht früher, so nach dem dritten Transformations-Versuche eintreten dürfte.

Ein weiteres Fortschreiten in den abgeleiteten Gleichungen erweist sich der etwas mühsamen Recursionsrechnung wegen nicht als vortheilhaft, sondern es ist, wenn man auch für $z_{,,}$ nicht alsbald auf eine ganze Zahl stossen sollte, der Grösse α respective β ein anderer Werth zu ertheilen, oder die Gleichung (V) mit (VI) zu vertauschen, oder endlich aus dem Systeme jener μ Gleichungen eine andere zu wählen. Jede dieser Veränderungen wird von Erfolg sein, da sie neue Gleichungen schafft, von denen eine oder die andere in ganzen Zahlen gelöst werden kann.

Eine solche Wendung in der Rechnung, die bei Gleichungen mit grossen Constanten zuweilen nöthig ist, verursacht übrigens weit weniger Mühe, als die Auflösung einer einzigen quadratischen Congruenz, deren Modul eine grosse Primzahl enthält; in diesem Falle wird die directe Methode von Lagrange praktisch unausführbar, während der hier angegebene Vorgang auch bei siebenziffrigen Primzahlen bald zum Ziele führt.

Bei diesem Verfahren ist man der Auflösung quadratischer Congruenzen ganz überhoben, sobald α oder β einen von Null verschiedenen Werth erhält. Anstatt nämlich den durch die Substitution $K = az + r$ entstandenen Bruch $\frac{r^2 - h}{a}$ durch Lösung der Congruenz $r^2 \equiv h \,(mod\; a)$ in eine ganze Zahl zu verwandeln, kömmt man mittels der zu (V) gehörigen Formel

$$\beta = \frac{K + \alpha b}{2a} \quad \text{oder } K = 2a\beta - \alpha b$$

auf die Gleichung $az + r = 2a\beta - \alpha b$, welche sofort die gelöste Congruenz $r \equiv -\alpha b \,(mod\; a)$ liefert, und aus dieser einen Wurzel r findet man die etwaigen andern durch Vereinigung lineärer Congruenzen. Hat man aber $K = \lambda k$ und $k = az + r$ gesetzt, so ist

$a\lambda z + \lambda r = 2a\beta - \alpha b$, somit $\lambda r \equiv -\alpha b (mod\, a)$. Würde endlich bei der Abkürzung durch λ^2 der Coefficient a in die Division einbezogen werden und in a_1 übergegangen sein, in Folge dessen $k = a_1 z + r$ zu setzen käme, so hätte man aus der Congruenz $\lambda r \equiv -\alpha b (mod\, a_1)$ den Werth von r zu bestimmen. Überhaupt muss $2a\beta - \alpha b$ auf die Form $a_1 \lambda z + \lambda r$ gebracht werden, und dabei r kleiner als a_1 sein; für die Gleichung (VI) gelten analoge Regeln.

Nur wenn in (I) $b = o$ ist, muss Eine quadratische Congruenz auf gewöhnliche Art gelöst werden.

Der Grund, warum von den 2μ Wurzeln der oben besprochenen Congruenz nur die erste Hälfte in die betreffende Gleichung einzusetzen ist, liegt darin, dass zu jeder Wurzel r in der ersten Hälfte sich eine Wurzel $a - r$ in der zweiten Hälfte findet; ist nun $K = az + r$ und man setzt hier $z_1 - 1$ für z, so wird $K = az_1 - (a - r)$; aus dieser Gleichung erhält man für K denselben Werth, wie aus der vorhergehenden, wenn z_1 um Eins grösser genommen wird als z, daher ist die zweite Hälfte der Wurzeln überflüssig.

Mit dem gefundenen ganzzahligen Werthe von z ist die aus Substitutionen und Transformationen bestehende rückläufige Rechnung durchzuführen, wobei zuweilen für β oder α mit kleineren Zahlen geschriebene Werthe erzielt werden können, wenn man die für eine dieser Grössen eingesetzte Zahl negativ nimmt; Brüche sind für α und β eben so brauchbar, wie ganze Zahlen.

Jede Abkürzung in (V) oder (VI), wie auch in den ferneren Gleichungen ist in der recurrenten Rechnung wohl zu berücksichtigen.

Wenn in (I) $b = o$ ist, wie auch dann, wenn α oder β gleich Null gesetzt wird, so bediene man sich der einfacheren Gleichung (IV), denn in beiden Fällen geben (V) und (VI) nach vollzogener Abkürzung in (IV) über. Letztere Gleichung hat für $b = o$ die Form

$$\Delta^2 = a\beta^2 + c(\alpha^2 - a) \text{ oder } \Delta^2 = c\alpha^2 + a(\beta^2 - c). \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

Mit jedem bekannten Werthe von x, etwa mit $\frac{m}{n}$, lassen sich beliebig viele andere finden, indem man aus (III) α und β bestimmt, hierauf in der Gleichung $ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2+(nx-m)$ $(\varepsilon x+\zeta)$ das Quadrat auf die linke Seite schafft und diese dann durch $nx-m$ dividirt; der Quotient $\varepsilon x+\zeta$ liefert die Wurzel $x=-\frac{\zeta}{\varepsilon}$ und ändert sich mit α und β. Setzt man in (III) ζ und $-\varepsilon$ statt m respective n, so ergeben sich neue Werthe von x.

Die Wirksamkeit dieser Methode und die dabei zu beobachtenden Vortheile mögen an einigen Beispielen ersichtlich gemacht werden.

1 Exempel. $y^2=331\,x^2+21193.$

Das Zahlenglied ist eine Primzahl von der Form $8n+1$.

Nach (IV_1) : $\Delta^2=331\,\beta^2+21193\,(\alpha^2-331)$; für $\alpha=18$ wird $\Delta^2=331\,\beta^2-148351$; $\Delta=331\,z+r$, $\beta^2=331\,z^2+2rz+448+\frac{r^2+63}{331}$, $r=54$, der Bruch $B=9$, somit $\beta^2=331\,z^2+108\,z+457$; die Formen $z=4n+2$, $5n$, $11n$ sind unbrauchbar; bis 11 gibt es für z keine Zahl. Aus der letzten Gleichung folgt nach (V) : $K_1^2=331\,\Delta_1^2-593404\,(\alpha_1^2-331)$; $\alpha_1=19$, $K_1=2k_1$, $\Delta_1=2d_1$, durch 4 dividirt: $k_1^2=331\,d_1^2-4450530$; $k_1=331\,z_1+r_1$; $K_1=331\,(2\beta_1)-19.108=331\,(2\beta_1-6)-66=2k_1$; somit $k_1=331\,z_1-33$, $\beta_1-3=z_1$ und $d_1^2=331\,z_1^2-66\,z_1+13449$; hier ist $z_1=2n$, für $z_1=+2$ wird $d_1=121$, $\beta_1=5$ und $\beta^2=(19\,z+5)^2-(10\,z+54)(3\,z-8)$, daher $z=+\frac{8}{3}$, $\beta=\pm\frac{167}{3}$ und $9y^2=(54\,x-167)^2+(21\,x+5816)(3\,x+28)$[1].

2. Exempel. $y^2=-2266\,x^2+21521.$ (1)

Das Zahlenglied ist eine Primzahl von der Form $8n+1$.

[1] Diese Transformation geschieht derart, dass man nach Bestimmung der Grössen α und β das Trinom $(a-\alpha^2)\,x^2+(b-2\alpha\beta)\,x+(c-\beta^2)$ in das Product $(\gamma x+\delta)(\varepsilon x+\zeta)$ verwandelt. Ist η^2 die Determinante des Trinoms, die hier immer ein Quadrat sein muss, so setze man $b-2\alpha\beta+\eta=2p$, $b-2\alpha\beta-\eta=2q$ und $px+qx$ anstatt $(b-2\alpha\beta)\,x$, worauf die Verwandlung des Trinoms in ein Product sofort ausgeführt werden kann.

Nach (IV_1) : $\Delta^2 = -2266\beta^2 + 21521(\alpha^2 + 2266)$; $\alpha^2 + 2266 = \gamma^2$, $\gamma + \alpha = 103$, $\gamma - \alpha = 22$, somit $\alpha = \frac{81}{2}, \gamma = \frac{125}{2}$, $\Delta = \frac{125}{2} d$, $\beta = \frac{125}{2}\beta_0$; setzt man diese Werthe ein und dividirt durch γ^2, so wird $d^2 = -2266\beta_0^2 + 21521$ . . . . (2)

$$d = 2266z + r,\ \beta_0^2 = -2266z^2 - 2rz + 9 - \frac{r^2 - 1127}{2266};$$

$$\left.\begin{array}{l} r = 689\ .\ .\ .\ 895 \\ B = 209\ .\ .\ .\ 353 \end{array}\right\} \text{ einsetzen:}$$

$$\beta_0^2 = -2266z^2 - 1378z - 200\ .\ .\ (3)$$

und

$$\beta_0^2 = -2266z^2 - 1790z - 344\ .\ .\ (4);$$

hier kann z keine ganze Zahl sein.

Aus (3) folgt nach (VI): $L_1^2 = -200\Delta_1^2 + 4.21521(\beta_1^2 + 200)$; $\beta_1 = 5$, $\beta_1^2 + 200 = 15^2$, $L_1 = 30 l_1$, $\Delta_1 = 3d_1$; einsetzen und durch 30^2 dividiren:

$l_1^2 = -2d_1^2 + 21521$; $l_1 = 2z_1 + r_1$; $L_1 = 200(-2\alpha_1) + 5.1378 = 2.30 z_1 + 30.1 = 30 l_1$, somit $l_1 = 2z_1 + 1$ und $d_1^2 = -2z_1^2 - 2z_1 + 10760$; $d_1 = 2d_{,,}$, $z_1 = 2z_{,,}$, durch 4 dividiren: $d_{,,}^2 = -2z_{,,}^2 - z_{,,} + 2690$; $z_{,,} = 4n$ und $z_{,,} = 3n$ sind auszuschliessen; für $z_{,,} = -10$ wird $d_{,,} = 50$, $z_1 = -20$, $l_1 = -39$, $L_1 = -1170$, $\alpha_1 = \frac{403}{20}$; nimmt man aber $\beta_1 = -5$, so wird $\alpha_1 = -\frac{143}{10}$; also folgt aus (3): $100\beta_0^2 = (143z + 50)^2 - (607z + 150)(407z + 150)$ und $z = -\frac{150}{407}$, daher $\beta_0 = -\frac{110}{407} = x$, weil (2) mit (1) identisch ist.

---

3. Exempel. $y^2 = 199x^2 - 229x + 434$.

Nach (V) : $K^2 = 199\Delta^2 - 293023(\alpha^2 - 199)$; für $\alpha = 13$ folgt:

$$K^2 = 199\Delta^2 + 8790690;\ K = 199z + r;$$

$$\Delta^2 = 199z^2 + 2rz - 44174 + \frac{r^2 - 64}{199};\ r = 8,$$

somit $\Delta^2 = 199z^2 + 16z - 44174$; $z = 2n+1$ und $z > 14$; für $z = -15$ wird $\Delta = 19$, $K = 2977$, $\beta = 0$ und

$$y^2 = 169x^2 + (2x-7)(15x-62).$$

Für $\alpha = 14$ wird $K^2 = 199\Delta^2 + 879069$; $K = 199z + r$,

$$\Delta^2 = 199z^2 + 2rz - 4417 + \frac{r^2-86}{199};$$

$$K = 199(2\beta) + 14.229 = 199(2\beta+16) + 22,$$

somit $r = 22$, $2\beta + 16 = z$ und $\Delta^2 = 199z^2 + 44z - 4415$; $z = 4n+2$ ist unbrauchbar; $z > 4$, für $z = +9$ wird $\Delta = 110$, $\beta = -\frac{7}{2}$ und $4y^2 = (28x-7)^2 + (6x-241)(2x-7)$.

---

4. Exempel. $$y^2 = -11x^2 - 63x + 131 \qquad (1)$$

Die Determinante $D = 9733$ ist eine Primzahl.

Nach (V): $K^2 = -11\Delta^2 + 9733(\alpha^2+11)$; für $\alpha = 1$, $K = 2k$, $\Delta = 2d$ wird:

$k^2 = -11d^2 + 29199$; $k = 11z + r$, $K = 11(-2\beta) + 1.63 = 11.2z + 8 = 2k$, also $k = 11z + 4$, eingesetzt: $d^2 = -11z^2 - 8z + 2653$; $z = 4n+2$, für $z = +6$ wird $d = 47$, $k = 70$, $K = 140$,

$$\beta = \frac{140 - 1.63}{2(-11)} = -\frac{7}{2} \text{ und}$$

$$4y^2 = (2x-7)^2 - (4x+25)(12x-19).$$

Hätte man oben $\alpha^2 + 11 = \gamma^2$ gesetzt, so wäre $\alpha = 5$, $\gamma = 6$, also $K = 6k$, $\Delta = 6d$, durch 36 dividirt:

$$k^2 = -11d^2 + 9733 \qquad (2)$$

$k = 11z + r$, $K = 11(-2\beta) + 5.63 = 11.6z + 18 = 6k$ also $k = 11z + 3$, eingesetzt: $d^2 = -11z^2 - 6z + 884$; hier darf z keine ungerade Zahl sein; somit $d = 2\delta$, $z = 2\zeta$ und durch 4 dividirt: $\delta^2 = -11\zeta^2 - 3\zeta + 221$ eine in ganzen Zahlen unmögliche Gleichung; also nach (VI):

$L_1^2 = 221\Delta_1^2 + 9733(\beta_1^2 - 221)$; $\beta_1 = 15$, $L_1 = 2l_1$, $\Delta_1 = 2d_1$, durch 4 dividirt: $l_1^2 = 221\,d_1^2 + 9733$, $l_1 = 221\,z_1 + r_1$

$$d_1^2 = 221 z_1^2 + 2r_1 z_1 - 44 + \frac{r_1^2 - 9}{221};$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 = 3,\ 88 \\ B = 0,\ 35 \end{matrix}\right\} \text{ somit } d_1^2 = 221 z_1^2 + 6z_1 - 44$$

und

$$d_1^2 = 221\,z_1^2 + 176\,z_1 - 9;$$

in dieser Gleichung wird für $z_1 = -1$, $d_1 = 6$, $l_1 = 133$, $L_1 = 266$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ und $4\delta^2 = (\zeta + 30)^2 - (15\zeta + 4)(3\zeta + 4)$, also $\zeta = -\frac{4}{3}$, $z = -\frac{8}{3}$, $k = -\frac{79}{3}$, und $d = \frac{86}{3} = 2y$, weil für $x = \frac{k-63}{22}$ die Gleichung (1) in $k^2 = -11(2y)^2 + 9733$ übergeht, die mit (2) identisch ist; somit $y = \frac{43}{3}$, $x = -\frac{134}{3}$; für $k = +\frac{79}{3}$ wird $x = -\frac{5}{3}$.

5. Exempel. $\quad y^2 = 7499\,x^2 + 8501\,x + 2661 \qquad (1)$

Die Determinante $D = -7552355 = -5.1510471$; der zweite Factor dürfte eine Primzahl sein. Für $\alpha = 0$ ist nach (IV):

$$\Delta^2 = 7499(2\beta)^2 - 7552355; \quad \Delta = 7499 z + r,$$

eingesetzt:

$$(2\beta)^2 = 7499 z^2 + 2rz + 1007 + \frac{r^2 + 862}{7499};$$

durch Lösung der Congruenz $r^2 + 862 \equiv 0 \,(mod\ 7499)$, deren Modul eine Primzahl ist, findet man $r = 1002$ und $B = 134$; somit $(2\beta)^2 = 7499 z^2 + 2004 z + 1141$; $z = 4n$ ist auszuschliessen; für $z = -6$ wird $2\beta = 509$ und $\beta = \frac{509}{2} = y$.

Führt man hier, obschon es nicht mehr nöthig ist, die Transformation aus, so folgt:

$$4y^2 = 509^2 + (2x + 7)(14998\,x - 35491).$$

Leichter geht die Rechnung, wenn man in der nach (V) gebildeten Gleichung $K^2 = 7499\Delta^2 - 7552355(\alpha^2 - 7499)$ $\alpha = 87$ setzt; da ist $\alpha^2 - 7499 = 70$; für $K = 5k$, $\Delta = 5d$ folgt nach Kürzung durch 25:

$$k^2 = 7499\,d^2 - 21146594;\quad k = 7499\,z + r,$$

$$d^2 = 7499\,z^2 + 2rz + 2820 + \frac{r^2 - 586}{7499},$$

$$K = 7499(2\beta) - 87.8501 = 7499.5z - 5.937 = 5k,$$

also $r = -937$, eingesetzt:

$$d^2 = 7499\,z^2 - 1874\,z + 2937;$$

$z = 2n+1$, $5n$, $9n$ sind unbrauchbar; bis 10 findet sich keine Zahl für z. Also nach (V)
$K_1^2 = 7499\,\Delta_1^2 - 4.14.1510471(\alpha_1^2 - 7499)$; für $\alpha_1 = 87$ befindet sich im Zahlengliede der Factor 28^2; also $K_1 = 28k_1$, $\Delta_1 = 28d_1$ und durch 28^2 dividirt:

$$k_1^2 = 7499\,d_1^2 - 7552355 \tag{2}$$

$$k_1 = 7499\,z_1 + r_1,\ K_1 = 7499(2\beta_1) - 87.1874 =$$
$$= 7499.28\,z_1 - 28.1002 = 28k_1,$$

somit $k_1 = 7499\,z_1 - 1002$; eingesetzt:

$$d_1^2 = 7499\,z_1^2 - 2004\,z_1 + 1141;$$

z_1 darf durch 4 nicht theilbar sein; für $z_1 = +6$ wird $d_1 = 509 = 2y$, weil die Gleichung (2) aus (1) entsteht, wenn dort $x = \dfrac{k_1 - 8501}{2.7499}$ gesetzt wird.

Würde davon abgesehen die Rechnung fortgesetzt werden, so fände man $k_1 = 43992$, $K_1 = 1231776$ und für $\alpha_1 = -87$ ist $\beta_1 = 93$, also $d^2 = (87z - 93)^2 - 14(z - 204)(5z - 2)$; $z = \dfrac{2}{5}$, $k = \dfrac{10313}{5}$, $K = 10313$, $\beta = 50$ und

$$y^2 = (87x + 50)^2 - (35x - 23)(2x + 7).$$