

Neue Methoden zur Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in ganzen Zahlen.

Von Prof. **Adolf Kunerth.**

§. 1.

1. Hat man aus einer unbestimmten quadratischen Gleichung für x die Gleichung

$$x = \frac{Ap^2 + Bp + C}{ap^2 + bp + c} \quad \text{I}$$

gefunden, so lassen sich aus derselben die ganzzahligen Werthe von x ermitteln, falls solche vorhanden sind.

In diesem Bruche, welcher die p -Function heissen mag, bedeutet p eine unbestimmte rationale Zahl, die anderen Buchstaben aber bezeichnen gegebene ganze Zahlen. Hätten die Coëfficienten a, b, c einen gemeinschaftlichen Factor m , so multiplicire man beide Seiten der Gleichung mit m , worauf von den ganzzahligen Werthen, die für $m \cdot x$ gefunden werden, die durch m theilbaren die gesuchten sind. Es kann daher angenommen werden, dass die Coëfficienten im Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor enthalten.

2. Hätten a und A den grössten gemeinschaftlichen Divisor n , so dass $a = na_1$ und $A = nA_1$, so setze man

$$p = \frac{q}{n};$$

dann wird

$$x = \frac{A_1 q^2 + Bq + Cn}{a_1 q^2 + bq + cn}$$

und a_1 ist prim gegen A_1 .

Es können somit in der obigen Gleichung a und A als relative Primzahlen angesehen werden.

3. Wäre c ein Theiler von C , oder würde nach vollzogener Abkürzung der zwei Brüche $\frac{A}{a}$ und $\frac{C}{c}$ der letztere mit einem kleineren Nenner geschrieben als der erstere, so setze man in der obigen Gleichung

$$p = \frac{1}{q}$$

und es wird

$$x = \frac{Cq^2 + Bq + A}{cq^2 + bq + a},$$

wodurch die Rechnung in kleineren Zahlen geführt werden kann.

4. Nun schaffe man mittelst der Substitution

$$p = \frac{q-b}{2a}$$

das zweite Glied des Nenners weg; dadurch geht dieser in

$$\frac{a(q^2 - b^2 + 4ac)}{4a^2}$$

und der Zähler in

$$\frac{1}{4a^2} (Aq^2 - 2Abq + 2aBq + Ab^2 - 2abB + 4a^2c)$$

über, und setzt man $2Ab^2 - Ab^2$ anstatt Ab^2 , so folgt nach geschehener Reduction

$$x = \frac{A(q^2 - b^2) + 2(aB - Ab)(q - b) + 4a^2c}{a[(q^2 - b^2) + 4ac]} \quad \text{II}$$

5. Im Allgemeinen haben Zähler und Nenner dieses Bruches implicite den gemeinschaftlichen Factor $4a^2$ was sogleich hervortritt, wenn man daselbst der obigen Substitution entsprechend $q - b = 2ap$ und $q + b = 2(ap + b)$ setzt; da wird der Zähler

$$= 4a^2(Ap^2 + Bp + C)$$

und der Nenner

$$= 4a^2(ap^2 + bp + c).$$

Multiplicirt man II mit a , so wird im Nenner der Factor $4a$ verbleiben, und denkt man für q einen solchen Bruch $\frac{r}{w}$ gesetzt, dass der Nenner $q^2 - b^2 + 4ac$ sich in $\frac{4a}{w^2}$ verwandelt, so wird aus dem Bruche in II eine ganze durch a theilbare Zahl.

Es ist somit

$$ax = A + \frac{2(aB - Ab)(q - b) + 4a(aC - cA)}{q^2 - (b^2 - 4ac)}$$

oder

$$ax = A + \frac{2(aB - Ab)q + 4a(aC - cA) - 2b(aB - bA)}{q^2 - (b^2 - 4ac)}$$

oder kurz:

$$ax = A + \frac{dq + f}{q^2 - g}.$$

III

6. Für jeden Werth von q , der $q^2 - g = \frac{4a}{w^2}$ macht, wird der Bruch in III eine ganze Zahl D , $A + D$ wird ein Vielfaches von a und somit x eine ganze Zahl. Letzteres wird oft erreicht, wenn sich für den Nenner $q^2 - g$ ein Bruch $\frac{ak}{w^2}$ finden lässt, dessen Bestandtheil k im Zähler von III als Factor bereits vorkommt oder dann auftritt, nachdem daselbst für die Variable q ein entsprechender specieller Werth eingesetzt wurde. Es wird später gezeigt werden, wie sich aus d, f, g jene ganzen Zahlen finden lassen, die für k versuchsweise zu setzen sind. Dabei ist aber zu bemerken, dass nicht jeder Werth von q , welcher den Bruch in III zu einer ganzen Zahl macht, auch x in eine solche verwandelt.

7. Für specielle Werthe von q kann der Nenner $q^2 - b^2 + 4ac$ in III den Factor 4 verlieren und eine bloß durch 2 theilbare oder auch eine ungerade Zahl werden, was übrigens den Gang der Rechnung nicht ändert. Der Factor a aber kann in diesem Nenner nicht verschwinden, einen einzigen sogleich zu erörtern-den Fall ausgenommen. Denn würde sich für einen speciellen

Werth von q der Factor a im Nenner $q^2 - b^2 + 4ac$ verlieren, so müsste dies auch im Äquivalente dieses Nenners $4a(ap^2 + bp + c)$ geschehen, was hier offenbar nur für $p = \frac{r}{as}$ eintreten könnte.

Setzen wir für p diesen Bruch in I, so folgt nach Wegschaffung der Nenner

$$x = \frac{Ar^2 + Bars + Ca^2s^2}{ar^2 + bars + ca^2s^2};$$

da hier der Nenner den Factor a enthält, der Zähler aber nicht, weil a prim gegen A ist, so könnte x keine ganze Zahl werden, falls a im Nenner des Bruches III verschwände.

8. Enthält a aber einen quadratischen Factor n^2 und ist b durch n theilbar, so wird sich für $q = nr$ dieser Factor n^2 im Bruche III auch für ein unbestimmt gelassenes r heben, wie aus III zu erschen ist. Wäre $a = n^2$ und b durch n theilbar, so wird a aus dem Nenner dieses Bruches hinausfallen.

Dieses nothwendige Vorkommen des Factors a im Nenner des Bruches III ist von besonderer Wichtigkeit.

9. Haben f und g den gemeinschaftlichen Factor n^2 und ist d durch n theilbar, so lässt sich der Bruch in III für $q = nr$ durch n^2 abkürzen; denn für $d = n\delta$, $f = n^2\varphi$, $g = n^2\gamma$ wird

$$ax = A + \frac{n^2\delta r + n^2\varphi}{n^2r^2 - n^2\gamma},$$

also

$$ax = A + \frac{\delta r + \varphi}{r^2 - \gamma}.$$

10. Ja selbst in dem Falle, wenn d den Factor n nicht enthält, während f durch n und g durch n^2 theilbar sind, kann die Abkürzung durch n^2 stattfinden, nachdem man beide Seiten der Gleichung III mit n multiplicirt hat; dann ist

$$anx = An + \frac{dn^2r + n^2\varphi}{n^2r^2 - n^2\gamma}.$$

oder

$$anx = nA + \frac{dr + \varphi}{r^2 - \gamma}.$$

Es lässt sich demnach die Gleichung III immer so gestalten, dass f und g keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, dessen Quadrat ein Theiler von g ist.

Diese Abkürzungen haben auch dann zu geschehen, wenn d, f oder g gleich Null sind.

11. Durch diese die weitere Rechnung bedeutend vereinfachenden Reductionen wird der Factor a im Nenner von III nicht beseitigt; denn für $q = nr$ wird

$$p = \frac{nr-b}{2a} = \frac{s}{2a};$$

setzen wir diesen Bruch für p in das Äquivalent der rechten Seite der Gleichung III, d. i. in den Ausdruck

$$\frac{a(As^2 + Bps + C)}{ap^2 + bp + c},$$

so kommt nach vollzogener Reduction

$$\frac{As^2 + 2aBs + 4a^2C}{s^2 + 2bs + 4a},$$

und weil $s = 2ap$, so enthält in diesem Bruche und daher auch im Bruche III der Zähler den Factor $4a^2$ und der Nenner den Factor $4a$.

Auch die zur Gleichung III gemachte Bemerkung, dass für solche Werthe von q , welche den Nenner in $\frac{4a}{w^2}$, resp. in $\frac{2a}{w^2}$, $\frac{a}{w^2}$ oder $\frac{ak}{w^2}$ verwandeln, der Bruch in eine ganze Zahl D übergeht, die um A vermehrt ein Vielfaches von a wird, behält ihre Gültigkeit, weil durch jene Abkürzungen die Factoren a^2 im Zähler und a im Nenner des Bruches III nicht verloren gehen; dabei aber muss k einen schicklichen Werth erhalten.

§. 2.

1. Ist die Gleichung III in ihrer einfachsten Form dargestellt, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

Ist g eine positive Quadratzahl, so ist zur Auffindung der ganzzahligen Werthe von x und y die Gleichung I eigentlich

nicht nöthig; denn alsdann lässt sich eine der Unbekannten unmittelbar als rationale Function der andern, und wenn dies nicht angeht, als Bruchfunction von p mit linearem Nenner ausdrücken. Will man jedoch aus der Gleichung III die ganzzahligen Werthe von x finden, so zerlege man den Bruch daselbst in zwei Partialbrüche, setze $q = \frac{r}{w}$ und ermittle jene Werthe von r und w , welche x zu einer ganzen Zahl machen. In diesem Falle, wie auch dann, wenn eine Bruchfunction von p mit linearem Nenner angewendet wird, ist die Anzahl der ganzzahligen Werthe von x eine begrenzte.

2. Zur Begründung dieses Verfahrens dienen folgende Betrachtungen: Es sei

$$x_1 = \frac{dp+f}{p^2-h^2} = \frac{1}{2h} \left[\frac{dh+f}{p-h} + \frac{dh-f}{p+h} \right]$$

und f prim gegen h (§. 1, 10), so wird für

$$p = \frac{v}{w}, \quad x = \frac{w}{2h} \left[\frac{dh+f}{v-hw} + \frac{dh-f}{v+hw} \right].$$

Da v und w relative Primzahlen sind, so können die Nenner der eingeklammerten Brüche nach Einsetzung der speciellen Werthe für r und w und vollzogener Abkürzung nur dann einander gleich werden, wenn beide in die Zahl 2 übergehen. Würde nämlich

$$v-hw = mk \quad \text{und} \quad v+hw = nk,$$

so folgt

$$v = (n+m) \frac{k}{2} \quad \text{und} \quad w = (n-m) \frac{k}{2h};$$

wegen w prim gegen v , kann k nur einen der drei Werthe $2, h, 2h$ annehmen. Dem Falle $k = 2$ steht nichts entgegen, doch ist er überflüssig, weil für $k = 1$ derselbe Werth für x erhalten wird.

Für $k = h$ müsste $v = hr$ sein, während f und w prim gegen h wären; dann würde

$$x = \frac{w}{h^2} \left(\frac{dhr+fw}{r^2-w^2} \right),$$

welcher Ausdruck offenbar in eine ganze Zahl nicht übergehen kann. Ebenso lässt sich zeigen, dass k den Werth $2h$ nicht erhalten darf. Es können somit die Partialbrüche auch nach vollzogener Reduction keine gleichen Nenner haben, mit Ausnahme des entbehrlichen Nenners 2.

Es kann ferner die Summe oder die Differenz zweier reducirten Brüche mit verschiedenen Nennern nie eine ganze Zahl werden. Angenommen, es wäre

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = n$$

eine ganze Zahl, wobei a prim gegen b , c prim gegen d und $b < d$ ist, so wäre $ad \pm bc = bdn$ und daher $\pm \frac{bc}{d} = bn - a$, was nicht möglich ist.

Die Summe der obigen Partialbrüche kann somit nur dann eine ganze Zahl werden, wenn jeder Bruch für sich in eine solche übergeht.

3. Hat man den Bruch $\frac{dp+f}{p^2-h^2}$ derart abgekürzt, dass f prim gegen h ist, so kann in den Partialbrüchen keine weitere Reduction vorgenommen werden als die, dass man beide Zähler durch den vor der Klammer stehenden Divisor 2 dividirt; dies ist aber nur dann zu thun, wenn beide Zähler ungerade Zahlen sind, weil sonst brauchbare Werthe von p verloren gehen könnten.

Sind beide Zähler gerade, durch 4 nicht theilbare Zahlen und $1, 2, k, l, \dots$, resp. $1, 2, k', l', \dots$ ihre Factoren, so ergeben sich die Werthe von v und w aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} v - hw &= 1, k, l, \dots, 2, 2k, 2l, \dots \\ v + hw &= 1, k', l', \dots, 2, 2k', 2l', \dots \end{aligned}$$

wobei die ohne 2 geschriebenen Zahlenglieder insgesamt ungerade Zahlen bezeichnen.

Da nun v und w ganze Zahlen sein sollen, so sind zur Bestimmung ihrer zusammengehörigen Werthe nur solche Gleichungspaare zu brauchen, deren Zahlenglieder beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind. Weil aber mit den ungeraden

Zahlen dieselben Werthe erhalten werden, wie mit den geraden, indem hier h eine ungerade Zahl sein muss, so kann man die geradzahligten Factoren weglassen, was mittelst Division der Zähler durch 2 bewirkt wird.

Wäre aber ein Zähler oder wären beide durch 4 theilbar, so müsste diese Division unterbleiben, weil sonst brauchbare Werthe von p verloren gehen könnten. Denu ohne Abkürzung käme man auf die Gleichungen

$$\begin{cases} v-hw = 2k \\ v+hw = 4k' \end{cases}$$

somit $v = k+2k'$, eine ganze Zahl; mit Abkürzung aber wäre

$$\begin{cases} v-hw = k \\ v+hw = 2k' \end{cases}$$

und $v = \frac{k+2k'}{2}$ ein Bruch.

4. Exempel:

$$x = \frac{5p^2+6p-67}{3p^2-14p-5} \text{ oder } 3x = 5 + \frac{88p-176}{3p^2-14p-5}$$

für $p = \frac{q+7}{3}$ wird

$$3x-5 = x_1 = \frac{88q+88}{q^2-64}$$

und für $q = 4r$ wird

$$2x_1 = \frac{44r+11}{r^2-4},$$

somit

$$x_1 = \frac{w}{8} \left[\frac{99}{v-2w} + \frac{77}{v+2w} \right],$$

daraus

$$\begin{aligned} v-2w &= \pm(1, 3, 9, 11, 33, 99); \\ v+2w &= 1, 7, 11, 77 \end{aligned}$$

aus diesen 48 Gleichungen folgt:

$$\begin{array}{rclcl}
 v-2w & = & 3 & 33 & -3 & -33 \\
 r+2w & = & 11 & 1 & 77 & 7 \\
 r & = & 7 & 17 & 37 & -13 \\
 w & = & 2 & -8 & 20 & 10 \\
 x_1 & = & 10 & -80 & -80 & 10 \\
 x & = & 5 & -25 & -25 & 5 \\
 p & = & 7 & -\frac{1}{2} & \frac{24}{5} & \frac{3}{5}
 \end{array}$$

sämmtliche Werthe von x .

§. 3.

1. Wäre jedoch g keine positive Quadratzahl, so multiplizire man beide Seiten der Gleichung III, welche, wenn $ax-A=x_1$ gesetzt wird, in

$$x_1 = \frac{dq+f}{q^2-g}$$

übergeht, mit q ; dann ist

$$qx_1 = \frac{dq^2+fq}{q^2-g} \quad \text{IV}$$

und da zeigt sich, dass auch dieser Bruch für jene Werthe von q eine ganze Zahl wird, welche den Bruch III in eine solche verwandeln.

Ist nämlich $q = \frac{v}{w}$ ein solcher Werth, so ist

$$x_1 = \frac{w(dv+fw)}{v^2-gw^2}$$

eine ganze Zahl, und weil v prim gegen w , so muss $dv+fw$ durch v^2-gw^2 theilbar sein; nun geht aber für $q = \frac{v}{w}$ die Gleichung IV über in

$$qx_1 = \frac{v(dv+fw)}{v^2-gw^2},$$

somit ist auch dieser Bruch und ebenso qx_1 eine ganze Zahl.

Aus IV folgt

$$qx_1 = d + \frac{fq-dg}{q^2-g},$$

und für $qx_1 - d = z$, wird

$$z = \frac{fq - dg}{q^2 - g} \quad \text{V}$$

und dieser Bruch ist auch eine ganze Zahl, weil z eine solche ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit d und die Gleichung III in ihrer am Beginne dieses Paragraphen verkürzten Form mit f , so folgt:

$$dz = \frac{dfq - d^2g}{q^2 - g} \quad \text{und} \quad fx_1 = \frac{dfq + f^2}{q^2 - g};$$

subtrahirt man die erste von der zweiten Gleichung, so ist

$$fx_1 - dz = \frac{d^2g + f^2}{q^2 - g} \quad \text{VI}$$

Der Zähler dieses Bruches ist eine bestimmte Zahl, welche mit S bezeichnet werden und Stammzahl heissen mag, weil ihr alle ganzzahligen Werthe von x entstammen; es ist somit

$$S = d^2g + f^2 \quad \text{VII}$$

2. Haben d und f einen gemeinschaftlichen Factor, so kürze man die Gleichung VI durch denselben ab; dieser Factor ist somit aus der Stammzahl wegzulassen.

3. Enthalten ferner d, f, g , den Primfactor ν , und zwar f mindestens in der zweiten, g wegen der bereits oben erwähnten Abkürzungen in der ersten und d in irgend einer Potenz, so ist jedes ganzzahlige x_1 und z durch ν oder eine Potenz von ν theilbar.

Denn es sei $d = \nu^p \delta$, $f = \nu^r \varphi$, $g = \nu^s \gamma$, so ist

$$x_1 = \frac{\nu^p \delta q + \nu^r \varphi}{q^2 - \nu^s \gamma};$$

ist q prim gegen ν , so ist x_1 ein Vielfaches der niedrigeren der zwei Potenzen ν^p und ν^r ; für $q = q_1$ aber ist x_1 ein Vielfaches von jener der zwei Potenzen ν^p und ν^{r-1} , welche den kleineren Exponenten hat.

Weil ferner $z = qx_1 - d$, so ist auch z ein Vielfaches von ν^p oder ν^r , somit sind x_1 und z durch die kleinere der Zahlen ν^p und ν^{r-1} theilbar.

Für $d = 0$ sind x_1 und z durch v^{r-1} und für $f = 0$ durch v^r theilbar.

Finden sich nun solche Potenzen der Primzahlen $v, v', v'', \dots$ vor, durch welche x_1 und z theilbar sind, so kürze man beide Seiten der Gleichung VI durch das Product dieser Potenzen ab und lasse dieses Product auch aus der Stammzahl weg.

Durch diese Reductionen kommt man auf den kleinsten Werth der Stammzahl, wodurch die weitere Rechnung bedeutend vereinfacht wird. Weil aber derartige Abkürzungen nur mit numerischen Zahlen möglich sind, so müssen die Gleichungen III und VI als Substrat des Folgenden dienen.

4. Setzt man in diesen Gleichungen $q = \frac{v}{w}$, so wird

$$x_1 = \frac{dv + fw}{v^2 - gw^2} \cdot v^2 \text{ und } fx_1 - dz = \frac{d^2g + f^2}{v^2 - gw^2} \cdot v^2;$$

da in diesen Brüchen der Factor w^2 auf die Theilbarkeit des Zählers durch den Nenner keinen Einfluss hat, so darf letzterer nur solche Werthe annehmen, durch welche der zweite Zähler, d. i. die Stammzahl theilbar ist.

5. Man zerlege daher diese Zahl in ihre einfachen und zusammengesetzten Factoren und setze, falls g positiv ist, jeden solchen positiv und negativ genommenen Factor dem Nenner $v^2 - gw^2$ gleich, lasse hierauf w die Werthe 1, 2, 3, 4, ... durchlaufen und sehe, für welche dieser Werthe v^2 eine positive Quadratzahl wird. Würde für $w = k$, $v^2 = l^2$ (eine Quadratzahl), somit $v = \pm l$, so könnten $+\frac{k}{l}$ oder $-\frac{k}{l}$, für q in III eingesetzt, diesen Bruch in eine ganze Zahl verwandeln, wovon man sich durch Einsetzen dieser Brüche in III überzeugen muss; dabei gibt es für die Grösse von k und l keine Grenzen.

6. Ist g aber eine negative Zahl, so dürfen blos die positiven Factoren der Stammzahl dem Nenner $v^2 + gw^2$ gleichgesetzt werden; nun lässt man w in 1, 2, 3, 4, ... übergehen, bemerkt jene Glieder dieser Reihe, welche für v^2 positive Quadratzahlen liefern, und erprobt die gefundenen Werthe von $\frac{v}{w}$ durch Sub-

stitution für q in die Gleichung III; die Rechnung findet ihren Abschluss, sobald gw^2 gleich der Stammzahl oder grösser als diese wird.

7. Im Hinblick auf die Gleichung III, welche die Form

$$x = \frac{A+x_1}{a}$$

annehmen kann, wird man für x_1 nur solche Werthe suchen, die um A vermehrt, eine durch a theilbare Summe geben. Wäre etwa m ein Factor von a , so sind — wegen a prim gegen A — alle durch m theilbaren w auszuschliessen, da sie blos solche x_1 erzeugen, welche Vielfache von m sind.

8. Hätte im Nenner von III der Factor α vorzukommen (§. 1, 7), so ist dieser Nenner nur jenen Factoren der Stammzahl gleichzusetzen, welche durch α theilbar sind; die anderen Factoren von S sind nicht zu gebrauchen.

9. Der Factor α muss aber im Nenner von III nicht vorkommen, wenn er ein gemeinschaftlicher Theiler von a, b, c ist (§. 1, 1) oder wenn a durch α^2 und b durch α theilbar sind (§. 1, 7) oder endlich, wenn die Gleichung III behufs der Abkürzung des dortigen Bruches durch α^2 mit α multiplicirt worden ist (§. 1, 9); in diesen drei Fällen muss der Nenner in III kein Multiplum von α sein; er kann es aber sein. Ist S durch α nicht theilbar, so kann kein Nenner den Factor α enthalten.

10. Zu jedem Werthe von q , welcher x in eine ganze Zahl verwandelt, lässt sich ein zweiter Werth finden, der dasselbe bewirkt. Löst man nämlich die Gleichung

$$x_1 = \frac{dq+f}{q^2-g}$$

nach q auf, so ist

$$q = \frac{1}{2x_1} (d \pm \sqrt{d^2 + 4fx_1 + 4gx_1^2}) \dots \lambda;$$

wäre für $q = n$,

$$x_1 = \frac{dn+f}{n^2-g}$$

eine ganze Zahl, so setze man sie — hier diesen Scheinbruch —

in die Gleichung λ .) und es folgt:

$$q = \frac{dn^2 - dg \pm (dn^2 + 2fn + dg)}{2(dn + f)}.$$

somit

$$q_1 = n, \quad q_2 = -\frac{fn + dg}{dn + f};$$

diese beiden Substitutionen liefern für x_1 denselben ganzzahligen Werth; doch können q_1 und q_2 einander auch gleich sein, wenn das Radical in λ , Null wird.

Hat man für x einen ganzzahligen Werth ρ gefunden und setzt in III $-\rho$ für x , so dass

$$-az = A + \frac{dq + f}{q^2 - g},$$

so lassen sich aus dieser Gleichung häufig zwei rationale Zahlen für q finden, welche wir mit q_3 und q_4 bezeichnen. Die vier Zahlen q_1, q_2, q_3, q_4 geben numerisch gleiche Werthe für x und mögen äquivalente Substitutionen heissen; mit veränderten Vorzeichen in die Gleichung III eingesetzt, liefern sie oft neue Werthe für x .

11. Erstes Exempel.

$$x = \frac{7p^2 + 10p - 3}{3p^2 + 2p - 7} \quad \text{oder} \quad 3x = 7 + \frac{16p + 40}{3p^2 + 2p - 7},$$

für $p = \frac{q-1}{3}$ wird

$$3x = 7 + \frac{16q + 104}{q^2 - 22} \quad \text{III}$$

die Stammzahl

$$S = \frac{-22 \cdot 16^2 + 104^2}{4 \cdot 2} = 648 \quad \text{oder} \quad S = 1 \cdot 2^3 \cdot 3^3;$$

somit $v^2 = 22u^2 \pm (3, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 81, 108, 162, 216, 324, 648)$.

Hier wurde der kürzeren Rechnung wegen für p nicht $\frac{q-2}{6}$ sondern $\frac{2q-2}{6}$ gesetzt und dadurch die Abkürzung des Bruches III durch 4 unter Einem vollzogen; und weil der Nenner

in III durch 3 theilbar sein muss, so wurden die durch 3 nicht theilbaren Factoren der Stammzahl sogleich weggelassen; da ferner, wegen $x = \frac{7+x_1}{3}$, die Zahl x_1 — d. i. der Bruch in III — kein Vielfaches von 3 werden darf, so ist auch dem w kein solcher Werth zu ertheilen; nun lasse man w in 1, 2, 4, 5, 7, ... übergehen und bemerke jene Werthe von r^2 , welche Quadratzahlen sind:

w	$22w^2$	r^2	q	x_1	x	p
1	22	16	+ 4	—28	—7	1
		25	— 5	8	5	—2
		49	+ 7	8	5	2
2	88	64	$\pm$ 4			
		16	— 2	— 4	1	—1
		100	$\pm$ 5			
		196	$\pm$ 7			
		169	$\pm \frac{13}{2}$	*		
4	352	*				
5	550	*				
7	1078	1024	$\pm \frac{32}{7}$	*		

u. s. f.

12. Zweites Exempel.

$$x = \frac{5p^2 + 6p + 27}{3p^2 - 2p + 5} \text{ oder } 3x = 5 + \frac{28p + 56}{3p^2 - 2p + 5}$$

für $p = \frac{q+1}{3}$ wird

$$3x - 5 = x_1 = \frac{28q + 196}{q^2 + 14}.$$

$$S = \frac{14 \times 28^2 + 196^2}{28 \times 14} = 126; \text{ hier wird die Stammzahl durch}$$

28 dividirt, weil $d = 28$ und $f = 196$ durch 28 theilbar sind, und sie wird ferner durch 14 dividirt, weil d und g den Factor 14 enthalten und in f das Quadrat von 14 vorkommt. (§. 33).

Auch hier sind die durch 3 nicht theilbaren Factoren der Stammzahl wegzulassen, und für w ist kein Vielfaches von 3 zu setzen. Es ist sonach:

$$r^2 = (3, 6, 9, 18, 21, 42, 63, 126) - 14w^2.$$

w	$44w^2$	r^2	q	x_1	x	p
1	44	4	+2	14	*	*
				*		
		49	-7	0		
2	56	*		*	*	*

Da w kleiner als 3 sein muss, so gibt es keine rationalen Zahlen für q und p , welche x zu einer ganzen Zahl machen.

Auf diese Weise lassen sich für ein negatives a und für ein positives g beliebig viele ganzzahlige Werthe von x finden, falls solche existiren, doch wird die Rechnung lästig, ja selbst unausführbar, wenn w grössere Zahlenwerthe erhalten muss.

§. 4.

1. Die in §. 1. 7. hinsichtlich des Factors a erörterte Eigenschaft des Bruches in III bietet ein Mittel die Rechnung auf den Fall $w = 1$ zu beschränken, wo q eine ganze Zahl ist.

Liefert die Stammzahl S keinen brauchbaren Werth für q und ist α der grösste Factor von a , der im Nenner von III — und somit auch in S — als Factor vorzukommen hat, so setze man mit Berücksichtigung der quadratischen Reste den Nenner $r^2 - gw^2 = \mp \alpha$ eventuell $= \mp 2\alpha$ und $= \mp 4\alpha$, wofern S durch letztere zwei Zahlen theilbar ist. Wäre keine dieser sechs Gleichungen möglich, so sind der Stammzahl in natürlicher Ordnung Vielfache von α zu entnehmen und an die Stelle von α in jene sechs Gleichungen zu setzen. Wäre $\alpha\beta$ ein solches Vielfache, so dürfen $2\alpha\beta$ und $4\alpha\beta$ nur dann verwendet werden, wenn sie Theiler von S sind.

Für $\alpha = 1$ sind die aufeinander folgenden Factoren von S als Zahlenglieder jener sechs Gleichungen zu benutzen.

Hat man auf diese Weise eine in ganzen Zahlen mögliche Gleichung gefunden — sie heisse die erste derivirte Gleichung — so bestimme man für dieselbe die p -Function und suche

aus dieser einen ganzzahligen Werth für w , dem ein ebenso beschaffener für v entsprechen wird. Sollte sich aber auch aus der neuen Stammzahl kein solcher Werth für w ergeben, so bilde man sich auf eine der oberen ähnliche Art die zweite derivirte Gleichung $r_1^2 - gw_1^2 = \mp \alpha_1 \dots$ und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man auf ein ganzzahliges w_r und v_r kommt; durch Einsetzen dieser Zahlen in die p -Function der vorhergehenden Derivirten findet man w_{r-1} und v_{r-1} und durch weitere recurrente Substitutionen schliesslich ein ganzzahliges x_1 .

2. Kann ein quadratischer Factor von S in eine derivirte Gleichung als Zahlenglied eintreten, so wird dadurch die Auffindung der zugehörigen p -Function erleichtert.

3. Käme man auf eine derivirte Gleichung, welche mit einer bereits vorkommenden Gleichung identisch ist, so muss statt jener Derivirten eine andere gesucht werden.

4. Ist man bei einer höheren, etwa der dritten Derivirten angelangt, so sind behufs der unmittelbaren Auffindung von w_3 mindestens aus der Gruppe $(\pm \alpha, \mp 2\alpha, \mp 4\alpha)$ alle zulässigen Gleichungen zu benützen und erst, wenn keine derselben ein ganzzahliges w_3 liefert, ist von jeder der zuletzt behandelten p -Functionen auf die nächste derivirte Gleichung überzugehen, weil sich sonst in manchen Fällen (namentlich wenn g eine grosse Zahl ist) die Rechnung in die Länge zieht, und man entweder für x nicht den kleinsten Werth findet oder eines der w nicht ganzzahlig ausfällt ¹.

5. Auch kann es vorkommen, dass sich für die gegebene Gleichung oder für eine der Derivirten die p -Function nicht finden lässt. Wäre $y^2 = g.r^2 + k$ eine solche Gleichung, so setze man $y = gz + r$; dann ist

$$x^2 = gz^2 + 2rz + \frac{r^2 - k}{g};$$

wäre $k > g$, also $k = gl + m$, so ist

$$x^2 = gz^2 + 2rz - l + \frac{r^2 - m}{g} \dots (\lambda.);$$

¹ Für p -Functionen welche von Gleichungen abgeleitet sind, die keine ganzzahligen Wurzeln besitzen, können auch die derivirten Gleichungen nicht in ganzen Zahlen gelöst werden.

da dieser Bruch in eine ganze Zahl n übergehen muss, so suche man aus der Gleichung $r^2 = gn + m$ alle ganzzahligen Werthe für r , die kleiner als g sind, d. h. man bestimme aus der Congruenz $r^2 \equiv m \pmod{g}$ sämtliche Wurzeln der ersten Periode und setze von diesen alle, die kleiner als $\frac{g}{2}$ sind für r in die Gleichung (λ); dies gibt eine Reihe von Gleichungen, von denen, wenn für x ein ganzzahliger Werth existirt, wenigstens eine für z eine ganze Zahl liefert. Wird für einen Werth von r das Binom $n - l$ eine Quadratzahl e^2 , so ist für $z = 0$, $x = e$ und $y = r$. Offenbar lassen sich aus diesen Gleichungen, in denen z positiv und negativ zu nehmen ist, alle Werthe von x finden, wenn die Anzahl derselben eine begrenzte ist, was für ein negatives g eintritt.

Ist g eine Primzahl, so erhält man für r zwei Werthe, und somit nur eine Gleichung mit der Variablen z . Hat z einen grösseren Zahlenwerth, so suche man für z die p -Function und aus derselben ein ganzzahliges z .

Die Gleichung (λ) nennen wir die der z -Function.

§. 5.

Auflösung von Congruenzen für einen zusammengesetzten Modulus.

$y^2 \equiv 109 \pmod{420}$ oder $y^2 = 420x + 109$; für $x = 1$ wird $y = 23$, also $y^2 = 420(x - 1) + 529 = [p(x - 1) - 23]^2$, hieraus

$$x = 1 + 2 \frac{23p + 210}{p^2}$$

und für $p = 2q$

$$x = 1 + \frac{23q + 105}{q^2}, \quad S = 105^2,$$

somit

$$q = \pm(1, 3, 5, 7, \dots).$$

Die Anzahl der incongruenten Wurzeln innerhalb der ersten Periode ist hier $2^4 = 16$; man setze

$$q = \frac{1}{n}, \quad = \frac{3}{n}, \quad = \frac{5}{n}, \quad = \frac{7}{n}$$

und ertheile dem Nenner n die zwei kleinsten positiven und negativen Werthe, welche obige q -Function in eine ganze Zahl verwandeln; so wird für $q = \frac{5}{n}$

$$x = 1 + \frac{23+21n}{5} \cdot n;$$

	für $n =$	2	7	−3	−8
wird	$x =$	27	239	25	233
	$y =$	107	317	103	313.

Ebenso findet man für jeden der drei anderen Werthe von q vier Wurzeln, welche hier in natürlicher Ordnung folgen:

$$y = 23, 37, 47, 103, 107, 163, 173, 187, 233, 247, 257, 313, 317, 373, 383, 397.$$

Hat der Modul weniger Factoren, so genügt es für n blos den kleinsten positiven und den kleinsten negativen Werth zu setzen.

§. 6.

Das Pell'sche Problem.

1. $y^2 = ax^2 + 1$; setzt man $ax^2 + 1 = (px + 1)^2$, so folgt:

$$x = \frac{-2p}{p^2 - a} \quad \text{und} \quad y = px + 1;$$

für diese p -Function ist $S = 2a$ und wenn a eine Primzahl bedeutet, so ist $S = 2$; denn in diesem Falle ist für $p = \frac{v}{w}$

$$x = \frac{-2vr}{r^2 - av^2};$$

setzt man $r^2 = av^2 + 2a$, so muss $v = av_1$ sein; dann kommt $w^2 = av_1^2 - 2$, und wäre hier $v_1 = m$, $w = n$, so wäre $v = am$ und

$$x = \frac{-2amn}{2a} = -mn.$$

Dann aber liefert die Gleichung $v^2 = av^2 - 2$ auch die Werthe $w = m$ und $v = n$, somit

$$x = \frac{-2mn}{-2} = +mn$$

wie oben; daher ist der Primfactor a in der Stammzahl überflüssig und kann weggelassen werden; also $S = 2$.

2. Erstes Exempel:

$$y^2 = 109x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{v^2 - 109w^2}; \quad S = 2,$$

$$v^2 = 109w^2 - 1 \dots = 100w^2 + (3w+1)(3w-1),$$

hieraus

$$3w = 1 - 2 \frac{10p - 109}{p^2 - 109}$$

$S = 18 \times 109$ liefert kein w ; somit

$$v_1^2 = 109w_1^2 + 3 \dots = (11w_1)^2 - 3(2w_1+1)(2w_1-1)$$

und

$$2w_1 = 1 - 2 \frac{11p_1 - 109}{p_1^2 - 109}$$

$S_1 = 24 \cdot 109$ gibt nichts; also

$$r_{11}^2 = 109w_{11}^2 - 4 \dots = (10w_{11})^2 + (3w+2)(3w-2)$$

$$3w_{11} = 2 - 4 \frac{10p_{11} - 109}{p_{11}^2 - 109} \dots S_{11} = 36 \times 109;$$

hier wird $109+12 = 121 = p_{11}^2$ und für $p_{11} = -11$ ist $w_{11} = 25$
 $r_{11} = 261$; $w_1 = 913$, $v_1 = 9532$; $w = 851525$, $v = 8890182$
 $x = 15,140.424,455.100$, $y = 158,070.671,986.249$.

Hätte man

$$r_1^2 = 109w_1^2 - 3 \dots = w^2 + 3(6w_1+1)(6w_1-1)$$

gesetzt, so käme

$$6w_1 = 1 - 2 \frac{q_1 - 109}{q_1^2 - 109}$$

$S_1 = 216 \times 109$ gibt nichts;

$$v_{11}^2 = 109w_{11}^2 - 12 \dots = w_{11}^2 + 12(3w_{11}+1)(3w_{11}-1)$$

$$3w_{11} = 1 - 2 \frac{q_{11} - 109}{q_{11}^2 - 109}$$

$S_{11} = 216 \times 109$; hier ist $109 - 9 = 100 = q_{11}^2$ und für $q_{11} = 10$ wird

$$\left. \begin{array}{l} w_{11} = 7, \quad w_1 = 134, \quad w = 851525 \\ r_{11} = 73, \quad r_1 = 1399, \quad r = 8890182 \end{array} \right\} \text{ wie oben.}$$

Hieraus ist zu ersehen, dass oft mehrere Factoren der Stammzahl dasselbe leisten; auch kann die Zerlegung der Binome $aw^2 + b$ in den Derivirten oft auf mehrere Arten geschehen.

Wäre in der ersten Rechnung die zweite Derivirte folgender Weise zerlegt worden:

$$r_1^2 = 109w_1^2 + 3 = (16w_1)^2 - 3(7w_1 + 1)(7w_1 - 1),$$

so käme

$$7w_1 = 1 - 2 \frac{16p_1 - 109}{p_1^2 - 109}$$

und weil die Stammzahl hier kein ganzzahliges w_1 liefert, so setzt man

$$r_{11}^2 = 109w_{11}^2 + 7 = (19w_{11})^2 - 7(6w_{11} + 1)(6w_{11} - 1)$$

und

$$6w_{11} = 1 - 2 \frac{19p_{11} - 109}{p_{11}^2 - 109}$$

$S_{11} = 504 \times 109$ für $109 + 12 = 121 = p_{11}^2$ ist $p_{11} = -11$ und

$$\left. \begin{array}{l} w_{11} = 9, \quad w_1 = 913 \\ r_{11} = 94, \quad r_1 = 9532 \end{array} \right\} \text{ wie dort.}$$

3. Ist für die Gleichung $r^2 = aw^2 + b$ diese Zerlegung auszuführen, so setze man $r^2 = d^2w^2 + (a - d^2)w^2 + b$ und die Determinante $-b(a - d^2) = c^2$ und trachte diese Gleichung nach c und d in ganzen Zahlen aufzulösen; gelingt dies und ist b positiv, so bestehen die Gleichungen

$$b = m\gamma^2 \text{ und } d^2 - a = m\gamma^2;$$

dann ist

$$r^2 = d^2w^2 - m(\gamma^2w^2 - \beta^2) = [dw + p(\gamma w - \beta)]^2$$

und hieraus

$$w = \frac{\beta p^2 - \beta m}{\gamma p^2 + 2dp + m\gamma}$$

oder

$$\gamma w = \beta - 2\beta \frac{dp + m\gamma}{\gamma p^2 + 2dp + m\gamma}$$

und fñr $p = \frac{q-d}{\gamma}$ wird

$$\gamma w = \beta - 2\beta \frac{dq - a}{q^2 - a} \quad M)$$

Fñr ein negatives b ist

$$-b = m\beta^2, \quad a - d^2 = m\gamma^2$$

und

$$v^2 = d^2 w^2 + m(\gamma^2 w^2 - \beta^2) = [dw + p(\gamma w - \beta)]^2$$

und hieraus

$$\gamma w = \beta - 2\beta \frac{dp - m\gamma}{\gamma p^2 + 2dp - m\gamma};$$

fñr $p = \frac{q-d}{\gamma}$ wird

$$\gamma w = \beta - 2\beta \frac{dq - a}{q^2 - a}$$

wie oben.

4. Wäre a negativ, so wird

$$\gamma w = \beta - 2\beta \frac{dq + a}{q^2 + a} \quad N)$$

Mittelst der Formeln $M)$ und $N)$ können nach erfolgter Zerlegung jener Binome die p -Functionen sofort gebildet werden.

5. Ist obige Zerlegung nicht möglich, so gelingt es manchmal eine bestimmte Quadratzahl abzusondern;

$$v^2 = aw^2 + (b - d^2) + d^2 = a(w^2 - c^2) + d^2,$$

woraus $w_1 = c$ und $v_1 = d$.

Fñr ein positives a ist

$$w = w_1 - 2 \frac{v_1 p - aw_1}{p^2 - a}$$

und fñr ein negatives a ist

$$w = w_1 - 2 \frac{v_1 p + aw_1}{p^2 + a}.$$

6. Zweites Exempel

$$y^2 = 331x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{v^2 - 331w^2}, \quad S = 2$$

$$v^2 = 331w^2 - 2 = (13w)^2 + 2(9w+1)(9w-1)$$

$$9w = 1 - 2 \frac{13p - 331}{p^2 - 331}; \quad S_1 = 324 \times 331 \text{ liefert nichts.}$$

$$v_1^2 = 331w_1^2 + 9 = (p_1w_1 + 3)^2$$

hieraus

$$w_1 = \frac{6p_1}{p_1^2 - 331}, \quad S_{11} = 6;$$

somit kann der Nenner dieses Bruches nur solche Werthe erhalten, welche Theiler von 6 sind. $+1$ führt auf die gegebene Gleichung; -1 ist unmöglich; -2 führt auf die erste Derivirte; $+2$ ist unmöglich; -3 liefert nicht sofort ein brauchbares p_1 ; $+3$ ist unmöglich, ebenso -6 ; somit bleibt bloß $+6$ und da ist

$$v_{11}^2 = 331w_{11}^2 + 6 = 625w_{11}^2 - 6(49w_{11}^2 - 1)$$

und

$$7w_{11} = 1 - 2 \frac{25p_{11} - 331}{p_{11}^2 - 331}; \quad S_{111} = 12 \times 49, \quad 331 - 7 = 324 = p_{11}^2;$$

$$\text{für } p_{11} = 18 \text{ wird } \begin{matrix} w_{11} = 5 \\ v_{11} = 91 \end{matrix}; \quad \text{für } p_1 = -\frac{91}{5} \text{ ist } \begin{matrix} w_1 = 455 \\ v_1 = 8278 \end{matrix};$$

$$\text{für } p = \frac{8278}{455} \text{ wird } \begin{matrix} w = 2900979 \\ v = 52778687 \end{matrix} \text{ und}$$

$$\left. \begin{matrix} x = 153,159.067,394.476 \\ y = 2.778,719.023,511.331 \end{matrix} \right\} \text{ die kleinsten Werthe.}$$

Würde man die zweite Derivirte so zerlegt haben:

$$v_1^2 = 331w^2 + 9 = (166w_1)^2 - 9(55^2w_1^2 - 1)$$

so wäre

$$55w_1 = 1 - 2 \frac{166p_1 - 331}{p_1^2 - 331}$$

und weil S_{11} nichts gibt, so setze man

$$v_{11}^2 = 331w_{11}^2 - 55;$$

da sich die p -Function für w_{11} nicht finden lässt, so sei

$$v_{11} = 331z + r,$$

daher

$$w_{11}^2 = 331z^2 + 2rz + \frac{r^2 + 55}{331},$$

also

$$r^2 \equiv -55 \pmod{331};$$

da findet sich $r_1 = 40$, $r_2 = 291$.

Für $r = 40$ ist

$$w_{11}^2 = 331z^2 + 80z + 5$$

und für $z = -1$ ist $w_{11} = 16$, $v_{11} = 291$, $w_1 = 455$ wie oben.

Hätte man den Werth von z nicht so leicht gefunden, so wäre mit Zuhilfenahme der Determinante folgende Zerlegung zu machen:

$$w_{11}^2 = 16z^2 + 5(9z + 1)(7z + 1) = [4z + p(7z + 1)]^2$$

und hieraus

$$7z = -1 + 2 \frac{4p - 51}{p^2 - 331}; \quad S = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11; \quad 331 - 7 = 324 = p^2;$$

für $p = 18$ wird $z = -1$, wie zuvor.

Würde man aber $r = 291$ gesetzt haben, so wäre

$$w_{11}^2 = 331z^2 + 582z + 256$$

und für $z = 0$ wird $w_{11} = 16$, $v_{11} = 291$ wie oben.

7. Drittes Exempel.

$$y^2 = 397x^2 + 1, \quad x = \frac{-2rw}{r^2 - 397w^2}$$

$$r^2 = 397w^2 - 1 = 36w^2 + 361w^2 - 1 = (6w)^2 + (19^2w^2 - 1)$$

$$19w = 1 - 2 \frac{6p - 397}{p^2 - 397}; \quad S_1 = 2 \cdot 19^2 \cdot 397 \text{ liefert nichts.}$$

$$v_1^2 = 397w_1^2 + 19 = (44w_1)^2 - 19(81w_1^2 - 1),$$

$$9w_1 = 1 - 2 \frac{44p_1 - 397}{p_1^2 - 397};$$

da auch S_{11} nichts bietet, so kommt

$$v_{11}^2 = 397w_{11}^2 + 9 = (p_{11}w_{11} + 3)^2, \quad w_{11} = \frac{-6p_{11}}{p_{11}^2 - 397}, \quad S = 6,$$

$$p_{11} = 20,$$

$$w_{11} = 40, \quad w_1 = 18951, \quad w = 1027776565$$

$$v_{11} = 797, \quad v_1 = 377596, \quad v = 20478302982 \quad \text{und}$$

$$x = 42,094.239,791.738,433.660$$

$$y = 838,721.786,045.180,184.649.$$

8. Setzt man bei diesen recurrenten Substitutionen jedes p mit seinem eigenthümlichen Vorzeichen in die zur Bestimmung der v dienenden Gleichungen ein, so findet man die v schneller als aus den derivirten Gleichungen, woselbst die Quadrate der w berechnet werden müssen.

9. Viertes Exempel.

$$y^2 = 1231x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{v^2 - 1231w^2}$$

$$v^2 = 1231w^2 + 2 = (41w)^2 - 2(15^2w^2 - 1),$$

somit

$$15w = 1 - 2 \frac{41p - 1231}{p^2 - 1231};$$

da die Stammzahl den Dienst versagt, so ist

$$v_1^2 = 1231w_1^2 - 15 = 16w_1^2 + 15(81w_1^2 - 1)$$

hieraus

$$9w_1 = 1 - 2 \frac{4p_1 - 1231}{p_1^2 - 1231};$$

auch hier bietet S_{11} nichts Brauchbares; daher

$$v_{11}^2 = 1231w_{11}^2 + 9 = (p_{11}w_{11} + 3)^2,$$

hieraus

$$w_{11} = \frac{-6p_{11}}{p_{11}^2 - 1231}, \quad S_{11} = 6;$$

für $p_{11} = 35$ wird

$$w_{11} = 35, \quad w_1 = 41479, \quad w = 40825882727,$$

$$v_{11} = 1228, \quad v_1 = 1455316, \quad v = 1432400982351.$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 58.479,034.523,501.522,751.177 \\ y &= 2.051.772,574.240,109.318,487.200 \end{aligned} \right\} \text{ die kleinsten Werthe.}$$

§. 7.

Wenn a eine zusammengesetzte Zahl ist, so setze man zur Auffindung der ersten derivirten Gleichung den Nenner $v^2 - av^2$ den aufeinander folgenden Factoren der Stammzahl versuchsweise gleich, bis man mit Berücksichtigung der quadratischen Reste auf eine in ganzen Zahlen mögliche Gleichung kömmt.

Bei der Untersuchung der Gleichung $v^2 = av^2 + b$ beschränke man sich nicht auf die drei Bedingungen ihrer Möglichkeit, sondern dividire auch noch jede Seite durch 3 und 8 und sehe, ob die Reste diesen Divisoren entsprechen. So sind die Gleichungen $v^2 = 153w^2 - 1$ und $v^2 = 153w^2 - 2$, obschon sie den bekannten drei Bedingungen entsprechen, in ganzen Zahlen doch nicht möglich, weil die erste Gleichung durch 3 und die zweite durch 8 dividirt, auf ihren rechten Seiten Reste lassen, welche diesen Divisoren nicht entsprechen. Doch gewährt auch dieses Kriterium keine Sicherheit, wie an der Gleichung $v^2 = 101w^2 + 19$ erprobt werden kann, indem sie allen jenen Bedingungen entspricht, und in ganzen Zahlen doch nicht zu lösen ist.

2. Erstes Exempel.

$$y^2 = 610x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{v^2 - 610w^2}$$

$S = 610$ gibt kein ganzzahliges x . —

$$v^2 = 610w^2 - 1 = 529w^2 + (81w^2 - 1)$$

$$9w = 1 - 2 \frac{23p_1 - 610}{p_1^2 - 610}, \quad S_1 = 81 \cdot 5 \cdot 61 \text{ liefert nichts.}$$

$$v_1^2 = 610w_1^2 + 9 = (p_{11}w_1 + 3)^2,$$

hieraus

$$w_1 = \frac{6p_{11}}{p_{11}^2 - 610}, \quad S_{11} = 6 \cdot 5 \cdot 61;$$

für $p_{11} = 25$ wird

$$\begin{aligned} w_1 &= 10, & w &= 2909, & x &= 418005846 \\ v_1 &= 247, & v &= 71847, & y &= 10323982819. \end{aligned}$$

3. Zweites Exempel.

$$y^2 = 91x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{r^2 - 91w^2}$$

$S = 2 \times 91$ gibt nichts; $r^2 - 91w^2 = -1, = \pm 2, = \pm 7, -14$ sind unmögliche Gleichungen;

$$r^2 = 91w^2 + 14 = (21w)^2 - 14(25w^2 - 1)$$

$$5w = 1 - 2 \frac{21p_1 - 91}{p_1^2 - 91}, \quad S_1 = 100 \times 91;$$

für $p_1 = 9$ wird

$$\begin{aligned} w &= 11, & x &= 165, \\ r &= 105, & y &= 1574. \end{aligned}$$

4. Drittes Exempel.

$$y^2 = 817x^2 + 1, \quad x = \frac{-2vw}{r^2 - 817w^2}$$

$S = 2 \cdot 19 \cdot 43$; $r^2 - 817w^2 = -1, = \pm 2$ sind unmöglich;

$$v^2 = 817w^2 - 19$$

ist möglich, doch die Zerlegung schwierig; somit

$$r = 817z + r,$$

also

$$w^2 = 817z^2 + 2rz + \frac{r^2 + 19}{817};$$

für $r = 57$ wird der letzte Bruch = 4, also $w = 2, v = 57$ und $x = 12, y = 343$.

Andere Auflösung.

$$y^2 = 817x^2 + 1 = (31x)^2 - (144x^2 - 1),$$

also

$$12x = 1 - 2 \frac{31p - 817}{p^2 - 817};$$

$S = 288 \times 817$; für $p = -29$ wird $x = 12$.

5. Viertes Exempel.

$$y^2 = 76x^2 + 1, \quad x = \frac{-2p}{p^2 - 76} = \frac{q}{q^2 - 19};$$

$S = 19$ gibt nichts.

$$c^2 = 19w^2 + 1, \quad w = \frac{-2q_1}{q_1^2 - 19},$$

$S_1 = 38$ liefert nichts;

$$c_1^2 = 19w_1^2 - 2 = w_1^2 + 2(9w_1^2 - 1) \dots 3w_1 = 1 - 2 \frac{q_{11} - 19}{q_{11}^2 - 19};$$

$S_{11} = 36 \times 19$; für

$$q_{11} = 4, \quad q_1 = \frac{13}{3}, \quad q = \frac{170}{39}$$

$$w_1 = 3, \quad w = 39$$

$$r_1 = 13, \quad v = 170$$

wird

$$x = 6630, \quad y = 57799.$$

§. 8.

Auffindung neuer Werthe der Unbekannten.

1. Kennt man für die Gleichung $y^2 = ax^2 + b$ zwei Werthe von x , deren einer auch Null sein kann, so lassen sich mit denselben oft neue Werthe von x , und wenn b eine Primzahl und a positiv ist, in beliebiger Anzahl finden.

Es seien x_1, y_1 und x_{11}, y_{11} zwei Paare bekannter Wurzeln dieser Gleichung, so ist die p -Function für

$$x = x_1 - 2 \frac{y_1 p - a x_1}{p^2 - a} \dots (\varphi);$$

setzt man $p = \frac{y_{11}}{x_{11}}$, so geht (φ) über in

$$x = x_1 - 2 \frac{y_1 y_{11} - a x_1 x_{11}}{b} \cdot x_{11}. \quad (A)$$

Der Annahme zufolge ist:

$$y_1^2 = a x_1^2 + b, \quad y_{11}^2 = a x_{11}^2 + b,$$

und nach vollzogener Multiplication beider Gleichungen ist

$$y_1^2 y_{11}^2 - a^2 x_1^2 x_{11}^2 = ab(x_1^2 + x_{11}^2) + b^2$$

oder

$$(y_1 y_{11} + a x_1 x_{11})(y_1 y_{11} - a x_1 x_{11}) = b[a(x_1^2 + x_{11}^2) + b];$$

ist b eine Primzahl, so muss einer der linksstehenden binomischen Factoren und somit auch der Zähler des Bruches in (A), welcher

diese zwei Binome repräsentirt, je nachdem man

$$p = + \frac{y_{11}}{x_{11}} \text{ oder } = - \frac{y_{11}}{x_{11}}$$

gesetzt hat, durch b theilbar sein; in diesem Falle wird für x stets eine ganze Zahl und zugleich ein neuer Werth erhalten.

Wäre b jedoch ein Product, so kann es vorkommen, dass ein Factor von b in $y_1 y_{11} + a x_1 x_{11}$, der zweite aber in $y_1 y_{11} - a x_1 x_{11}$ enthalten ist, und dann liefert jene Substitution keinen ganzzahligen Werth für x .

In dieser Rechnung muss das zweite Glied des Nenners $p^2 - a$, d. i. die Zahl a der Coefficient von x^2 sein; wäre jedoch die p -Function durch v^2 abgekürzt worden, so müsste der Bruch $\frac{y_{11}}{x_{11}}$ durch v dividirt werden, damit der obige Satz Geltung habe.

3. Erstes Exempel.

$$y^2 = 11x^2 + 1,$$

da $x_1 = 0$, so ist

$$x = \frac{-2p}{p^2 - 11}, \quad S = 2,$$

und für $p = 3$ wird $x_{11} = 3$, $y_{11} = 10$; für $p = \frac{10}{3}$ wird $x_{111} = 60$ und $y_{111} = 199$.

4. Zweites Exempel.

$$y^2 = 30x^2 + 91;$$

hier ist $x_1 = 3$, $y_1 = 19$, somit

$$x = 3 - 2 \frac{19p - 90}{p^2 - 30}, \quad S = 60.91;$$

daraus findet man für

$p =$	-3	4	5	6	-10	15
$x =$	11	1	$5,71$	$5,71$	11	1
$y =$	61	11	$29,389$.			

Setzt man nun mit entsprechendem Vorzeichen

$$p = \frac{11}{1} \quad \frac{29}{5} \quad \frac{61}{11} \dots$$

so kommt

$$x = * \quad +113 \quad *$$

für $p = \frac{11}{1}$ wird

$$y_1 y_{11} - a x_1 x_{11} = 19 \times 11 - 30 \cdot 3 \cdot 1 = 119 \text{ durch } 7 \text{ theilbar;}$$

$$y_1 y_{11} + a x_1 x_{11} = 19 \times 11 + 30 \cdot 3 \cdot 1 = 299 \quad \text{„} \quad 13 \quad \text{„}$$

aber es ist weder 119 noch 299 durch 91 theilbar.

§. 9.

Fortsetzung.

1. Sind in der Gleichung $y^2 = ax^2 + b$ drei Werthe von x bekannt, so lassen sich durch Addition und Subtraction der gefundenen Wurzeln neue Wurzeln, und wenn a positiv ist, in beliebiger Anzahl finden. Sind $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ diese bekannten Werthe, so setze man

$$p = \frac{y_2 + y_3}{x_2 + x_3}$$

in die Gleichung

$$x = x_1 - 2 \frac{y_1 p - a x_1}{p^2 - a},$$

da folgt

$$x = x_1 - 2 \frac{y_1(y_2 + y_3) - a x_1(x_2 + x_3)}{(y_2 + y_3)^2 - a(x_2 + x_3)^2} (x_2 + x_3)$$

oder

$$x = x_1 - \frac{y_1(y_2 + y_3) - a x_1(x_2 + x_3)}{y_2 y_3 - a x_2 x_3 + b} (x_2 + x_3). \quad (A)$$

Aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} y_2^2 &= a x_2^2 + b \\ y_3^2 &= a x_3^2 + b \end{aligned} \right\} \quad (z)$$

folgt durch Multiplication

$$(y_2 y_3 - a x_2 x_3)(y_2 y_3 + a x_2 x_3) = ab(x_2^2 + x_3^2) + b^2 \dots \quad (\lambda)$$

und wenn man die linksstehenden Binome mit u respective v und das rechtsstehende mit w bezeichnet, so ist

$$uv = w \text{ und } u + b = \frac{w + bv}{v},$$

also $v(u + b) = w + bv$, d. i.

3 *

$$r(u+b) = ab(x_2^2 + x_3^2) + b^2 + by_2y_3 + abx_2x_3 = \\ = ab(x_2 + x_3)^2 + b(u+b)$$

und hieraus

$$(u+b)(r-b) = ab(x_2 + x_3)^2,$$

das ist

$$(y_2y_3 - ax_2x_3 + b)(y_2y_3 + ax_2x_3 - b) = ab(x_2 + x_3)^2 \quad (B)$$

somit

$$y_2y_3 - ax_2x_3 + b = \frac{ab(x_2 + x_3)^2}{y_2y_3 + ax_2x_3 - b}$$

in (A) substituirt:

$$x = x_1 - \frac{[y_1(y_2 + y_3) - ax_1(x_2 + x_3)](y_2y_3 + ax_2x_3 - b)}{ab(x_2 + x_3)}. \quad (C)$$

Aus (λ) und (z) folgt bei obiger Bezeichnung

$$ur = b(y_2^2 + y_3^2 - b),$$

somit

$$r(u+b) = b(y_2^2 + y_3^2) - b^2 + by_2y_3 + abx_2x_3 = \\ = b(y_2 + y_3)^2 - b(y_2y_3 - ax_2x_3 + b) = b(y_2 + y_3)^2 - b(u+b)$$

und hieraus

$$(u+b)(r+b) = b(y_2 + y_3)^2,$$

somit

$$y_2y_3 - ax_2x_3 + b = \frac{b(y_2 + y_3)^2}{y_2y_3 + ax_2x_3 + b}$$

in A) substituirt:

$$x = x_1 - \frac{[y_1(y_2 + y_3) - ax_1(x_2 + x_3)](y_2y_3 + ax_2x_3 + b)(x_2 + x_3)}{b(y_2 + y_3)^2}. \quad (D)$$

Vergleicht man diesen Werth von x mit dem obigen in (C) stehenden, so zeigen sich verschiedene Zähler und Nenner; dieser Unterschied muss aber nach vollzogener Reduction verschwinden. Zuvörderst hebt sich in beiden Brüchen der grösste gemeinschaftliche Theiler m von $x_2 + x_3$ und $y_2 + y_3$, so dass für $x_2 + x_3 = mk$ und $y_2 + y_3 = ml$, die Nenner dieser Brüche in ak und l^2 übergehen, wenn man vorläufig von b absieht; weil aber k prim gegen l ist, so muss k hinausfallen und es bleibt a und l^2 .

Nun sei $a = \mu\alpha$, $l^2 = \mu\lambda$ und α prim gegen λ ; dann müssen α und λ sich heben und beide Nenner gehen in μ über.

Enthält μ keinen quadratischen Factor, so ist l durch μ theilbar; wäre aber μ ein Vielfaches von ν^2 — wobei ν eine ungerade Primzahl bezeichnen soll — so müsste ν^2 wegen der Gleichung

$$y_2^2 - y_3^2 = a(x_2^2 - x_3^2). \quad (\pi)$$

auch ein Theiler von $y_2 + y_3$ sein; denn wäre letzteres Binom nur durch ν theilbar, so müsste auch $y_2 - y_3$ und demzufolge y_2 und y_3 durch ν theilbar sein; dann aber wären b und a Vielfache von ν^2 und man könnte die gegebene Gleichung durch ν^2 abkürzen; somit muss $y_2 + y_3$ den Factor ν^2 enthalten. Zwar könnte beim Abkürzen von $y_2 + y_3$ und $x_2 + x_3$ der Factor ν oder ν^2 sich in diesen Binomen heben, dann aber wäre die rechte Seite der Gleichung π durch ν^3 respective ν^4 theilbar, und $y_2 + y_3$ müsste den Factor ν^3 respective ν^4 ebenfalls enthalten, so dass nach erfolgter Abkürzung in l der Factor ν^2 zurückbleiben würde. Es muss somit l durch jedes μ , welches keine geradzahle Zahl ist, theilbar sein.

Würde jedoch μ den Factor 2^{2n} enthalten, so müssten b und sämtliche y ungerade Zahlen sein; $y_2 + y_3$ wäre dann durch 2^{2n-1} und $y_2 - y_3$ durch 2 theilbar; käme überdies in $x_2 + x_3$ der Factor 2^m vor, so müsste $y_2 + y_3$ ein Vielfaches von 2^{2n+m-1} sein, so dass nach erfolgter Abkürzung der Binome $y_2 + y_3$ und $x_2 + x_3$ in l noch immer 2^{2n-1} verbliebe, und weil der zweite Factor im Zähler des Bruches in (C) wegen der Beschaffenheit der Zahlen a, b, y_2, y_3 ebenfalls geradzahlig sein muss, so ist der Zähler des Bruches in (C) durch 2^{2n} theilbar.

Die Brüche in (C) und (D) können somit nach erfolgter Reduction keinen grösseren Nenner haben als b .

Ist b eine Primzahl, so wird wegen der Gleichung (B) x stets eine ganze Zahl; ist b aber ein Product, so kann ein Factor von b im Nenner zurückbleiben, und dann ist x ein Bruch.

2. Da wegen der Form der gegebenen Gleichung die Werthe der Unbekannten positiv und negativ genommen werden können, so repräsentirt das Binom $x_2 + x_3$ folgende vier Verbindungen:

$$x_2 + x_3, \quad x_2 - x_3, \quad -x_2 + x_3, \quad -x_2 - x_3,$$

und da ein Gleiches auch für $y_2 + y_3$ gilt, so ergeben sich für d

folgende acht Brüche :

$$\pm \frac{y_2 + y_3}{x_2 + x_3}, \pm \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}, \pm \frac{y_2 + y_3}{x_2 - x_3}, \pm \frac{y_2 - y_3}{x_2 + x_3},$$

mit denen der Versuch, einen oder mehrere neue ganzzahlige Werthe für x zu finden, zu machen ist.

3. Das Einsetzen dieser Brüche kann aber nur dann Erfolg haben, wenn der Coefficient von x^2 , nämlich die Zahl a im Nenner der p -Function intact vorkommt; wäre jedoch dieser Bruch durch einen quadratischen Factor von a , etwa durch v^2 abgekürzt worden, so müsste auch jeder für p einzusetzende Bruch durch v dividirt werden.

4. Da in dieser Rechnung x_1, y_1 für x_3, y_3 gesetzt werden kann, so gilt dieser Satz auch dann, wenn für x blos zwei Werthe bekannt sind, und häufig lassen sich schon mit x_1 und x_2 neue Wurzeln finden; in Peel's Problem jedoch sind, wenn $x = 0$ gezählt wird, noch zwei Werthe erforderlich.

5. Sollten die zwei Wurzeln x_1 und x_2 nicht genügen, so suche man mittelst der Substitution $p = \frac{y_2}{x_2}$ eine dritte Wurzel, oder was noch sicherer ist, man finde für x_2 die äquivalenten Substitutionen (§. 3, 10) und setze dieselben mit entgegengesetzten Vorzeichen in die p -Function; besonders dann, wenn vier Äquivalente gefunden wurden, dürfte eines derselben ein ganzzahliges neues x liefern.

6. Bei Anwendung dieser Additionsmethode kommt man auf alle innerhalb eines beliebig bestimmten Zahlenraumes liegenden Werthe von x . Auch wenn a negativ und das Zahlenglied gross ist, kann dieses Verfahren zur Auffindung solcher Wurzeln, welche die p -Function nicht liefert, mit Vortheil benützt werden; sonst müsste man aus einem der gefundenen Wurzelpaare — etwa aus x_2, y_2 — eine neue p -Function bilden, und mit dieser die etwa noch unbekannten Werthe suchen, was eine mühsamere Rechnung ist (§. 13, 2).

7. Erstes Exempel.

$$y^2 = 30x^2 + 91, \quad x = 1 - 2 \frac{11p - 30}{p^2 - 30}, \quad S = 60.91$$

$$y^2 = ax^2 + bx + c \quad \text{I}$$

ohne Beseitigung des Gliedes bx die Unbekannte x durch die p -Function unmittelbar ausgedrückt wird. Letzteres ist nur dann möglich, wenn man einen Werth von x bereits gefunden hat, sei es durch Versuche, sei es durch Absonderung eines quadratischen Gliedes.

Es seien x_1 und y_1 ganzzahlige Werthe der Gleichung I, so ist

$$y^2 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1) + y_1^2 = [p(x - x_1) + y_1]^2$$

und hieraus

$$x = x_1 - \frac{2y_1p - 2ax_1 - b}{p^2 - a} \quad \text{II}$$

und

$$y = -y_1 + \frac{(2ax_1 + b)p - 2ay_1}{p^2 - a} \quad \text{III}$$

Für $x = \frac{z-b}{2a}$ geht I über in

$$z^2 = 4ay^2 + (b^2 - 4ac) \quad \text{IV}$$

und da y_1 und z_1 bekannte Wurzeln dieser Gleichung sind, so ist

$$z^2 = 4a(y^2 - y_1^2) + z_1^2 = [q(y - y_1) + z_1]^2$$

und

$$y = y_1 - \frac{2z_1q - 8ay_1}{q^2 - 4a};$$

für $q = 2r$ und $z_1 = 2ax_1 + b$ wird

$$y = y_1 - \frac{(2ax_1 + b)r - 2ay_1}{r^2 - a}; \quad \text{V}$$

da von dem Vorzeichen abgesehen — was bei y statthaft ist — dieser letzte Ausdruck für y mit dem in III stehenden identisch ist, so wird jeder Werth von r , welcher y zu einer ganzen Zahl macht, für p in die Gleichung II gesetzt, auch x in eine ganze Zahl verwandeln, sobald $\frac{z-b}{2a}$ in eine solche übergeht, oder es wird dies durch einen äquivalenten Werth von r bewirkt (§. 3 10) den man aus den bereits bekannten Wurzeln der Gleichung I

finden kann; offenbar muss p äquivalent mit r sein, weil auch p der Gleichung V Genüge leistet.

In der ersten Rechnung ist $y = p(x - x_1) + y_1$ und in der zweiten Rechnung ist $z = q(y - y_1) + z_1$ hieraus

$$z = pq(x - x_1) + z_1,$$

und für z und z_1 die Werthe gesetzt

$$2ax + b = pq(x - x_1) + 2ax_1 + b,$$

somit

$$pq = 2a \text{ und } p = \frac{2a}{q}.$$

Wären $x_2, x_3; y_2, y_3; z_2, z_3$ ganzzahlige Werthe der Gleichungen I und IV und

$$q = \frac{z_2 - z_3}{y_2 - y_3} = \frac{2a(x_2 - x_3)}{y_2 - y_3}$$

ein brauchbarer Werth zur Bestimmung eines neuen ganzzahligen y , so könnte auch

$$p = 2a : \frac{2a(x_2 - x_3)}{y_2 - y_3} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

ein ganzzahliges x liefern, und dieser Werth von p lässt sich aus der für I geführten Rechnung finden.

2. Exempel.

$$y^2 = 7x^2 - 16x + 21;$$

hier ist $x = 3, y = 6$ also

$$y^2 = 7(x^2 - 9) - 16(x - 3) + 36 = [p(x - 3) - 6]^2$$

und daraus

$$x = 3 + 2 \frac{6p + 13}{p^2 - 7}, \quad S = 2 \times 83;$$

für $p = +3$	-3	$\frac{87+9}{34+2} = \frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$
$x = +34$	-2	$+525$	-51
$y = 87$	9	1386	$138.$

§. 11.

Auflösung einiger Gleichungen von der Form
 $y^2 = ax^2 + b$ für positive Werthe von a .

1. Erstes Exempel.

$$y^2 = 637x^2 + 575; \quad \text{I}$$

für $y = 5y_1$ und $7x = x_1 = 5x_{11}$ geht diese Gleichung über in

$$y_1^2 = 13x_{11}^2 + 23 \quad \text{II}$$

für $x_{11} = 1$ wird $y_1 = 6$; also ist

$$x_{11} = 1 - 2 \frac{6p - 13}{p^2 - 13},$$

$S = 26.23$ liefert nichts; also $v^2 = 13w^2 - 1$, hier ist $w = 5$
 $v = 18$; für $p = +\frac{18}{5}$ wird $x_{11} = 431$, ein durch 7 nicht theil-
 barer, somit unbrauchbarer Werth; dagegen liefert

$$p = -\frac{18}{5} \dots x_{11} = 1729, y_1 = 6234,$$

somit ist $x = 1235$, $y = 31170$.

Auf andere Art. Hätte man die Gleichung I nicht ab-
 gekürzt, so wäre zu setzen:

$$y^2 = d^2x^2 + (637 - d^2)x^2 + 575$$

hieraus

$$d^2 = 23\gamma^2 + 637;$$

setzt man $d = 7\delta$ und $\gamma = 7\varepsilon$, so wird $\delta^2 = 23\varepsilon^2 + 13$ und für
 $\varepsilon = 1$, $\delta = 6$ und $d = 42$, somit

$$y^2 = (42x)^2 - 23(49x^2 - 25)$$

und

$$7x = 5 - 10 \frac{42p - 637}{p^2 - 637}$$

oder

$$7x = 5 - 10 \frac{6q - 13}{q^2 - 13}, S = 130 \times 23;$$

da S nichts liefert und den Factor 7 nicht enthält, so kann gesetzt werden: $v^2 = 13w^2 - 1$; für $w = 5$ wird $v = 18$ und für

$$q = -\frac{18}{5} \text{ folgt } x = -1235$$

wie oben.

2. Zweites Exempel.

$$y^2 = 52x^2 - 139 \dots = 52x^2 - (139 + d^2) + d^2$$

daraus

$$d^2 = 13\gamma^2 - 139;$$

für $d = 13z + r$ wird

$$\gamma^2 = 13z^2 + 2rz + \frac{r^2 + 139}{13};$$

für $r = 2$ wird

$$\gamma^2 = 13z^2 + 4z + 11$$

oder

$$\gamma^2 = 49z^2 - (18z - 11)(2z + 1)$$

und

$$2z = -1 - 2 \frac{7p + 9}{p^2 - 13}, S = 1112;$$

für $p = 3$ ist $z = 7$, $\gamma = 26$, $d = 93$ somit

$$y^2 = 52x^2 - 8788 + 93^2 = 52(x^2 - 13^2) + 93^2$$

und

$$x = 13 - 2 \frac{93p - 676}{p^2 - 52}$$

oder

$$x = 13 - \frac{93q - 338}{q^2 - 13}, S = 13 \times 139;$$

da die Stammzahl kein x finden lässt, so setzen wir $v^2 = 13w^2 - 1$

hier ist $w = 5$, $v = 18$ und für $q = \frac{18}{5}$ kommt als zweiter Werth

$x = 67$, $y = 483$.

3. Drittes Exempel.

$$y^2 = 397x^2 + 9007, \quad y = 397z + r,$$

$$x^2 = 397z^2 + 2rz - 22 + \frac{r^2 - 273}{397};$$

dieser Bruch wird gleich 24 für $r = 99$, also ist

$$x^2 = 397z^2 + 198z + 2$$

oder

$$x^2 = (dz)^2 + (397 - d^2)z^2 + 198z + 2,$$

hieraus

$$2d^2 + 9007 = \gamma^2;$$

für $d = 3$ ist $\gamma = 95$ und

$$x^2 = 9z^2 + (194z + 2)(2z + 1) = [3z + p(2z + 1)]^2$$

und

$$2z = -1 + \frac{3p - 95}{p^2 + 3p - 97}$$

oder

$$2z = -1 + 2 \frac{3q - 199}{q^2 - 397},$$

$S = 8 \times 9007$ liefert nichts. Also setzen wir

$$v^2 = 397w^2 - 4 = (19w)^2 + 4(3w + 1)(3w - 1)$$

und

$$3w = 1 - 2 \frac{19r_1 - 397}{r_1^2 - 397}, \quad S_1 = 72;$$

für $r_1 = -20$ wird $w = 173$, $v = 3447$; und für $q = +\frac{3447}{173}$ wird
 $z = +1041719$, $x = 20756109$ und $y = 413562542$.

§. 12.

Auflösung mittelst Congruenzen.

1. Jede Gleichung von der Form $ay^2 = bx^2 + c$ kann so transformirt werden, dass je zwei der Zahlen a, b, c relativ einfach gegen einander sind; dabei sollen a und b von Eins verschieden sein. Hat obige Gleichung diese Eigenschaft, so bringe man die Congruenzen

$$ay^2 \equiv c \pmod{b} \text{ und } bx^2 \equiv -c \pmod{a}$$

auf die Form

$$y^2 \equiv m \pmod{b} \text{ und } x^2 \equiv n \pmod{a} \quad (\mu)$$

und setze

$$y^2 = bu + m \text{ und } x^2 = av + n$$

in die erste Gleichung; da folgt

$$abu + am = abr + bn + c$$

und

$$u - v = \frac{-am + bn + c}{ab} = d$$

eine ganze Zahl, weil $u - v$ eine solche ist.

Löst man nun die zwei Congruenzen in (μ) auf, so sind jene Werthe von y und x , für welche $u - v = d$ ist, Wurzeln der obigen Gleichung und aus einem Paare derselben lassen sich mit Hilfe der p -Function andere Werthe finden.

Diese Methode empfiehlt sich besonders dort, wo die Coëfficienten grosse Zahlen sind, mit welchen die p -Function schwer zu finden ist.

2. Erstes Exempel.

$$11y^2 = 13x^2 + 71 \quad \text{I}$$

$$11y^2 \equiv 71 \pmod{13} \text{ und } 13x^2 \equiv -71 \pmod{11}$$

daraus

$$y^2 \equiv 10 \pmod{13} \text{ und } x^2 \equiv 3 \pmod{11}, \quad \text{II}$$

somit

$$y^2 = 13u + 10 \text{ und } x^2 = 11v + 3;$$

in I gesetzt, folgt $u = v$. Aus den Congruenzen in II findet man für $u = v = 2$ $y = 6$, $x = 5$; Wurzeln von I. Multiplicirt man I mit 11 und setzt $11y = y_1$, so ist

$$y_1^2 = 143x^2 + 781 \quad \text{III}$$

und da $x = 5$, $y_1 = 66$, so folgt

$$x = 5 - 22 \frac{6p - 65}{p^2 - 143}$$

wobei

$$y_1 = p(x - 5) + 66$$

ist; $S = 4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 113$; hiermit findet man

$p =$	11	12	13
$x =$	6, -126	- 149, 3019	-6, 126
$y_1 =$	77, 1507	-1782, 36102	
$y =$	7, 137	- 162, 3282	

Auflösung mit Benützung der Methode von Leslie.

Man setze die den Congruenzen in II entsprechenden Binome

$$y = 6 + 13n, \quad x = 5 + 11m,$$

in denen m und n unbekannte Zahlen bezeichnen, in die Gleichung I, so kommt

$$13n^2 + 12n = 11m^2 + 10m$$

oder

$$n(13n + 12) = m(11m + 10);$$

setzt man nun

$$13n + 12 = km, \quad 11m + 10 = kn$$

und eliminirt aus diesen Gleichungen m , so folgt

$$n = \frac{10k + 132}{k^2 - 143}, \quad S = 22 \times 71$$

und gibt:

$k =$	1	11	12
$n =$	-1	-11, -1	252, 12
$y =$	7	137, 7	3282, 162
$x =$	6	126, 6	3019, 149

wie oben.

3. Zweites Exempel.

$$182y^2 = 165x^2 + 857$$

I

$$182y^2 \equiv 857 \pmod{165}, \quad 165x^2 \equiv -857 \pmod{182}$$

oder

$$y^2 \equiv 31 \pmod{165}, \quad x^2 \equiv 29 \pmod{182}$$

somit

$$y^2 = 165u + 31, \quad x^2 = 182v + 29$$

in I gesetzt, folgt $u = v$. Löst man die zwei letzten Congruenzen auf, so wird für $u = v = 10$

$$y = 41, \quad x = 43.$$

Multiplieirt man die Gleichung I mit 182 und setzt $182y = y_1$ so kommt

$$y_1^2 = 30030x^2 + 155974 \quad \text{II}$$

und weil $x = 43$, $y_1 = 7462$ Wurzeln dieser Gleichung sind, so ist

$$x = 43 - 2 \frac{7462p - 30030 \times 43}{p^2 - 30030}$$

oder

$$x = 43 - 364 \frac{41p - 165 \times 43}{p^2 - 165 \times 182} \quad \text{III}$$

$$S = 165 \times 182 \times 857;$$

ein Factor von S ist 29995, und um 30030 vermehrt, kommt 245^2 als Summe; für $p = -245$ wird $x = 251$, und weil hier

$$y_1 = p(x - 43) + 7462, \quad (\rho)$$

so ist

$$y_1 = -43498 \text{ und } y = 239.$$

Um fernere Wurzeln der Gleichung II zu finden, bestimme man die äquivalenten Substitutionen für $x = \pm 251$; diese sind

$$p = -245, \frac{693}{4}, -\frac{858}{7}, \frac{520}{3};$$

für $p = -\frac{693}{4}$ kommt $x_3 = -357925$ und aus (ρ) $y_1 = 62025418$ somit $y = 340799$. Ferner ergibt sich für

$$p = \frac{-y_2 + y_3}{+x_2 - x_3} = \frac{4159}{24} \dots x_4 = 2087861$$

4. Drittes Exempel.

$$15y^2 = 91x^2 + 71 \quad \text{I}$$

$$15y^2 \equiv 71 \pmod{91}, \quad 91x^2 \equiv -71 \pmod{15}$$

oder

$$y^2 \equiv 29 \pmod{91} \text{ und } x^2 \equiv 4 \pmod{15}$$

somit

$$y^2 = 91u + 29, \quad x^2 = 15v + 4$$

in I gesetzt, folgt $u = v$; für $u = v = 52$ wird $x = 28$, $y = 69$; multiplicirt man die Gleichung I mit 15 und setzt $15y = y_1$, so wird

$$y_1^2 = 1365x^2 + 1065 \quad \text{II}$$

und da $x = 28$, $y_1 = 1035$ ist, so wird

$$x = 28 - 30 \frac{69p - 2548}{p^2 - 1365},$$

$S = 2.3.5.7.13.71$ liefert kein ganzzahliges x ; somit ist die Gleichung

$$v^2 - 1365w^2 = n$$

zu bilden, wo n ein Factor von S sein muss; da findet sich

$$v^2 = 1365w^2 - 35 \dots = d^2w^2 + (1365 - d^2)w^2 - 35$$

hieraus

$$d^2 = 1365 - 35\gamma^2;$$

für $\gamma = 2$ wird $d = 35$, also

$$v^2 = (35w)^2 + 35(4w^2 - 1)$$

und

$$2w = 1 - 2 \frac{35q - 1365}{q^2 - 1365}$$

oder

$$2w = 1 - 70 \frac{q - 39}{q^2 - 1365}, \quad S_1 = 8.3.5.7.13$$

und weil

$$1365 + 4 = 37^2$$

ist, so ist $q = 37$, $w = 18$, $v = 665$; für $p = \frac{665}{18}$ wird $x = 352$

und aus

$$y_1 = 1035 + p(x - 28)$$

folgt

$$y_1 = 13005 \text{ und } y = 867;$$

hier ist $u = v = 8260$.

$$\text{Für } p = -\frac{665}{18} \text{ kommt } x_3 = -1415528, \quad y_1 = 52297965$$

und $y = 3486531$ u. s. f.

5. Auflösung derselben Gleichung mittelst der z -Function.

Setzt man

$$y_1 = 1365z + r$$

in die Gleichung II, so wird

$$x^2 = 1365z^2 + 2rz + \frac{r^2 - 1065}{1365};$$

für $r = 330$ wird der letzte Bruch $= 79$ und

$$x^2 = 1365z^2 + 660z + 79 \quad \text{III}$$

für $z = -1$ wird $x = 28$, $y_1 = 1035$. Um fernere Werthe zu finden, bilde man die p -Function:

$$z = -1 - 2 \frac{28p + 1035}{p^2 - 1365},$$

$S = 30.71$ gibt nichts.

Aus der Beschaffenheit der Gleichung III ist zu ersehen, dass x auch dann eine ganze Zahl werden kann, wenn z einen Bruch bezeichnet, dessen Nenner ein Factor von 1365 ist.

Um diese Brüche zu finden, bestimme man jene Factoren von 1365, welche dem Binome $v^2 - 1365w^2$ gleichgesetzt, eine in ganzen Zahlen mögliche Gleichung geben. Diese Factoren sind: $+1$, -35 , $+39$, -1365 .

$$a) \quad v^2 = 1365w^2 + 1, \quad w = \frac{-2p_1}{p_1^2 - 1365}, \quad v = p_1w + 1,$$

$S = 2.3.5.7.13$ liefert nichts. Nun folgt aus S :

$$r_1^2 = 1365w_1^2 - 35 = (35w_1)^2 + 35(4w_1^2 - 1)$$

hieraus

$$2w_1 = 1 - 2 \frac{35q - 1365}{q^2 - 1365}$$

oder

$$2w_1 = 1 - 70 \frac{q - 39}{q^2 - 1365}, \quad S_1 = 8.3.5.7.13;$$

$$1365 + 4 = 37^2 = q^2$$

und für $q = 37$ wird $w_1 = 18$, $v_1 = 665$ und für $p_1 = \frac{665}{18}$ wird

$w = 684$ und $v = 25271$; endlich für $p = \frac{25271}{684}$ folgt aus der

p -Function für z :

$$z = -481537 \text{ und } x = 17790812$$

und

$$y_1 = -657297675, \quad y = -43819845,$$

$$b) \quad v^2 = 1365w^2 - 35$$

hat nach a) $w = 18$, $v = 665$ und für

$$p = \frac{\mp 665}{18} \text{ kommt } z = +\frac{65}{7} \text{ und } \frac{268193}{7}$$

daher $x = 352$ respective 1415528 .

$$c) \quad v^2 = 1365w^2 + 39 = (39w)^2 - 39(4w^2 - 1)$$

daraus

$$2w = 1 - 2 \frac{39q - 1365}{q^2 - 1365}, \quad S_1 = 8.3.7.5.13;$$

für $q = 37$ wird $w = 19$, $v = 702$ also $p = \frac{702}{19}$; es folgen für x dieselben Werthe wie in b).

$$d) \quad v^2 = 1365w^2 - 1365 \dots = 1365(w^2 - 1),$$

für $w = 1$, ist $v = 0$ und für $p = 0$ wird $z = \frac{47}{91}$ und $x = 28$, welchen Werth man auch für $p = \infty$ und $z = -1$ erhalten hätte.

6. Es lassen sich somit die Werthe von x auch aus der p -Function für z derartig berechnen, dass die Werthe von z Brüche mit solchen Nennern werden, welche Factoren von a sind; der Zahl a sind demnach die Constanten in den derivirten Gleichungen zu entnehmen.

§. 13.

Auflösung einiger Gleichungen von der Form

$$y^2 = ax^2 + b, \text{ für negative Werthe von } a.$$

1. Erstes Exempel.

$$y^2 = -43x^2 + 3728983 \quad \text{I}$$

Bestimmt man für den Divisor 8 die quadratischen Reste beider Seiten dieser Gleichung, so zeigt sich, dass y eine gerade und x eine ungerade Zahl bezeichnen muss.

Für $y = 43z + r$ wird

$$x^2 = -43z^2 - 2rz + 86720 - \frac{r^2 - 23}{43};$$

aus der Lösung der diesem Scheinbruche entsprechenden Congruenz ergibt sich $r = 18$, und der Bruch wird gleich 7. Es ist somit

$$x^2 = -43z^2 - 36z + 86713. \quad \text{II}$$

Da $y < 1931$ ist, so muss $z < 45$ sein, und weil x eine ungerade Zahl sein soll, so muss z im Hinblicke auf II wegen des Achterrestes eine geradgerade Zahl sein, die wegen des Fünferrestes in II kein Vielfaches von 5 ist. Man hat daher in II zu setzen:

$$\pm z = 4, 8, 12, 16, 24, 28, 32, 36, 44;$$

und da kommt für $z = 12$, $x = 283$, und da wegen

$$-2rz = -36 \cdot 12,$$

$r = +18$ sein muss, so ist

$$y = 12 \times 43 + 18 = 534;$$

sonst gibt es keine ganzzahligen Werthe für x und y .

2. Zweites Exempel.

$$y^2 = -140x^2 + 141035661. \quad \text{I}$$

Wegen des Achterrestes müssen x und y ungerade Zahlen sein, und weil das Zahlenglied durch 9^2 theilbar ist, so kann $x = 9x_1$ und $y = 9y_1$ gesetzt werden. Dann folgt:

$$y_1^2 = -140x_1^2 + 1741181 \quad \text{II}$$

$$y_1 < 1320, \quad y_1 = 140z + r,$$

also

$$z < 10 \text{ und } x_1^2 = -140z^2 - 2rz + 12437 - \frac{r^2 - 1}{140};$$

bezeichnen wir diesen Bruch mit u , so findet sich für

$u = 0$	6	12	34
$r = 1$	29	41	69,

die ersten vier Glieder der aus acht Gliedern bestehenden ersten

Periode der Wurzeln der obigen Congruenz. Setzt man diese Zahlen in die letzte Gleichung für r und n , so folgt

$$\begin{aligned} x_1^2 &= -140z^2 - 2z + 12437 \dots (\alpha) \text{ hier kann } \pm z = 1, 2 \\ x_1^2 &= -140z^2 - 58z + 12431 \dots (\beta) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \pm z = 1, 5 \\ x_1^2 &= -140z^2 - 82z + 12425 \dots (\gamma) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \pm z = 1, 4, 5, 7, 8 \\ x_1^2 &= -140z^2 - 138z + 12403 \dots (\delta) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \pm z = 1, 3, 9 \end{aligned}$$

sein.

Es sind nämlich im Vorhinein jene Substitutionen auszuschliessen, von denen die rechten Seiten der vier oberen Gleichungen keine quadratischen Reste sein können.

Aus (α) folgt für

$$z = -2, x_1 = 109, y_1 = 279 \text{ und } x = 981, y = 2511;$$

aus (γ) folgt für

$$z = 8, x_1 = 53, y_1 = 1161 \text{ und } x = 477, y = 10449.$$

Um fernere Werthe von x zu finden, bilde man aus I die p -Function:

$$x = 477 - 9 \frac{1161q + 3710}{q^2 + 35};$$

hier ist $p = 2q$, $S = 9.5.7.13.151.887$; für

$q =$	2	28	-56
wird	$x =$	915	79
	$y =$	4881	11839
			9039.

Nun suche man entsprechende Werthe für q durch Addition und Subtraction der letzt gefundenen Wurzeln; da ergibt sich für

$$q = \frac{9039 + 4881}{2(651 + 915)} = \frac{40}{9}, \quad x = 981,$$

wie aus (α) , und benützt man auch diesen Werth, so wird für

$$q = \frac{11839 - 2511}{2(79 + 981)} = \frac{22}{5}$$

$x = 983$ und $y = 2399$.

Ausser diesen sechs Paaren von Wurzeln, besitzt die Gleichung I keine anderen in ganzen Zahlen.

Weil hier die p -Function durch 4 abgekürzt wurde, was daran zu erkennen ist, dass in ihrem Nenner anstatt 140, die Zahl 35 steht, so mussten nach §. 9, 3 die zwei letzt gefundenen Werthe von p durch 2 dividirt und erst hierauf gleich q gesetzt werden.

§. 14.

1. Ist in der möglichst reducirten Gleichung

$$y^2 = -ax^2 + b \quad \text{I}$$

die obere Grenze von y eine grosse Zahl, so kann für $y = az + r$ auch z einen grösseren Werth g erfordern und die Rechnung wird dann lästig. In diesem Falle setze man $4z$ oder $8z$ anstatt z , wodurch der Werth dieser Unbekannten verkleinert wird.

Für $y = 8az + r$ ist

$$x^2 = -a(8z)^2 + 2r(8z) + \frac{b-r^2}{a}$$

und wenn $b = ac + d$ ist, so folgt:

$$x^2 = -a(8z)^2 + 2r(8z) + c - \frac{r^2 - d}{a}; \quad \text{II}$$

hätte die Congruenz $x^2 \equiv d \pmod{a}$ innerhalb der ersten Periode n Wurzeln, so wären wegen $r < 8a$ die Wurzeln der ersten acht Perioden in II einzusetzen, was $8n$ Gleichungen gäbe; weil z aber positiv oder negativ genommen werden kann, so kann r immer kleiner als $4a$ sein, und man braucht nur die Wurzeln der ersten vier Perioden für r in II zu setzen. Dies gibt ein System von $4n$ Gleichungen, von denen nur jene beizubehalten sind, deren Zahlenglieder quadratische Achterreste lassen. In diesen Gleichungen ertheile man nun der Unbekannten z alle Werthe der natürlichen Zahlenreihe von 0 bis $\frac{g}{8} + 1$, und bemerke jene Werthe von z , welche x^2 zu einer Quadratzahl machen.

Um die Rechnung abzukürzen, sind im Vorhinein jene Substitutionen auszuschneiden, für welche das Zahlenglied einen quadratischen Nichtrest gibt.

2. Exempel. Es sei die letzt behandelte Gleichung auf diese Art zu lösen:

$$y^2 = -140x^2 + 141035661, \quad \text{I}$$

$y < 11875$, somit $z_1 < 86$; man setze daher

$$y = 140.8z + r,$$

jetzt ist $z < 12$

$$x^2 = -140(8z)^2 - 2r(8z) + 1007397 - \frac{r^2 - 81}{140}; \quad \text{II}$$

Da es hier in der ersten Periode acht Werthe von r gibt, so müssen 32 aufeinander folgende Werthe für r und für den mit k zu bezeichnenden Bruch genommen werden; diese sind;

$k =$	0	2	18	26	44	56	104	122
$r =$	9	19	51	61	79	89	121	131
$k =$	158	180	260	288	342	374	486	524
$r =$	149	159	191	201	219	229	261	271
$k =$	596	638	782	830	920	972	1148	1206
$r =$	289	299	331	341	359	369	401	411
$k =$	1314	1376	1584	1652	1778	1850	2090	2168
$r =$	429	439	471	481	499	509	541	551

Da x eine ungerade Zahl bezeichnet und der Achterrest des Zahlengliedes in II 5 ist, so muss der Achterrest von k 4 sein und es können sonach nur die hervorgehobenen Werthe von k gebraucht werden; dies gibt folgende acht Gleichungen:

Ausgeschlossen sind:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 = -35(16z)^2 - 79(16z) + 1007353 & (1) \dots z = 0, 5, 10, 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -159 \quad \text{„} + 1007217 & (2) \dots z = 0, 5, 10, 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -191 \quad \text{„} + 1007137 & (3) \dots z = 0, 5, 7, 10, 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -271 \quad \text{„} + 1006873 & (4) \dots z = 0, 5, 10, 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -289 \quad \text{„} + 1006801 & (5) \dots z = 7 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -369 \quad \text{„} + 1006425 & (6) \dots z = 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -401 \quad \text{„} + 1006249 & (7) \dots z = 7, 11 \\
 \text{„} \quad \text{„} \quad -481 \quad \text{„} + 1005745 & (8) \dots z = 3, 7, 9
 \end{array}$$

Aus (1) kommt für $z = +8$, $x = 651$

„ (2) „ „ $z = +2$, $x = 983$

„ (3) „ —

„ (4) „ „ $z = +2$, $x = 981$

„ (5) „ —

„ (6) „ „ $z = +9$, $x = 477$

„ (7) „ „ $z = +4$, $x = 915$

„ (8) „ „ $z = -11$, $x = 79$

wie in der ersten Rechnung.

§. 15.

Auflösung von Gleichungen anderer Form.

1. Erstes Exempel.

$$5x^2 - 7xy - 3y^2 - 17x + 8y - 28 = 0,$$

daraus

$$y = \frac{7x-8}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{-11x^2 + 92x + 400},$$

hieraus

$$z^2 = -11x^2 + 92x + 400 = (20 - px)^2,$$

$$x = 4 \frac{10p+23}{p^2+11}, \quad S = 4.9.181$$

$p =$	1	-5	∞
$x =$	11	-3	0
$z =$	9	5	20
$y =$	10, 13	-4	2

2. Zweites Exempel.

$$2x^2 - 6xy + y^2 - 14x + 10y + 4 = 0.$$

$$y = 3x - 5 \pm \sqrt{7x^2 - 16x + 21}$$

$$z^2 = 7x^2 - 16x + 21 = 4x^2 + (3x-7)(x-3) = [2x + p(x-3)]^2,$$

somit

$$x = 3 - \frac{12p-2}{p^2+4p-3},$$

für $p = q-2$ wird

$$x = 3 - 2 \frac{6q-13}{q^2-7}, \quad S = 2 \times 83;$$

für	$q =$	∞	3	$\frac{-2+34}{2+10} = \frac{8}{3}$
	$x =$	3	-2	34
	$z =$	± 6	± 9	± 87
	$y =$	-2, 10	-2, -20	10, 184
				-20, -296
				184, 2956

3. Drittes Exempel.

$$42x^2 + 62xy + 21y^2 = 585$$

$$y = -\frac{31x}{21} \pm \frac{1}{21} \sqrt{79x^2 + 12285};$$

$$v^2 = 79x^2 + 12285; \quad v = 79z + r;$$

$$x^2 = 79z^2 + 2rz - 155 + \frac{r^2 - 40}{79},$$

für $r = 35$ wird der Bruch $= 15$ somit

$$x^2 = 79z^2 + 70z - 140;$$

für $z = 1$ wird

$$x = 3, \quad v = 114 \quad \text{und} \quad v^2 = 79(x^2 - 9) + 114^2$$

hieraus

$$x = 3 - 6 \frac{38p - 79}{p^2 - 79}, \quad S = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 79$$

$p =$	0	8	7	5	4	3	1	9	10	11...
$x =$	-3	93	66	*	19	6	*	1266, 786	83	74
$v =$	114	834	597		202	123		11253, 6987	746	667
$-y =$	1	177	69		*	3		1333, 1493	87	141.

Die ferneren p liefern nichts oder Wiederholungen.

§. 16.

Anhang.

Zum Schlusse folge noch eine Berichtigung der zwar ohne Beweis gegebenen, dabei aber vortrefflichen Regel Tenner's für die Verwandlung von $\sqrt{N}$ in einen Kettenbruch, wie dies bei der Auflösung einer unbestimmten quadratischen Gleichung nach der Methode von Lagrange erforderlich ist.

Sollte man $\sqrt{109}$ in einen Kettenbruch verwandeln, so ist nach Tenner in folgender Weise zu rechnen:

1. Man schreibe

$$\begin{array}{cccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \\ 10 & \times & 10 & = & 109 & - & 9 \end{array}$$

(Die vollständige Rechnung steht auf der folgenden Seite.)

2. Darauf dividire man $10+10$ durch 9 und setze den Quotienten (2) unter I, den Rest (2) unter II.

3. Diesen Rest subtrahire man von 10 und setze den Rest (8) unter III, das Quadrat dieses Restes (64) in IV, subtrahire es von 109 und setze den Rest (45) in V.
4. Man dividire diesen durch die Zahl 9 der zunächst vorhergehenden Reihe in VI und setze den Quotienten (5) in VI.
5. Man dividire wieder $10 + \text{III}$, d. i. $10 + 8$ durch die Zahl (5) in VI, setze den Quotienten (3) in I, den Rest (3) in II, subtrahire ihn von 10, setze den Rest (7) in III u. s. w.
6. Sobald man in II oder in VI dieselbe Zahl erhält, die unmittelbar dartüber steht, so ist die Rechnung geschlossen. Sollte einmal der Divisor in VI in der nächstfolgenden Zahl in V nicht aufgehen, so ist dies ein Zeichen, dass ein Rechnungsfehler vorgefallen ist.

In I steht die dem Kettenbruche vorangehende ganze Zahl (10) und darunter stehen die Nenner des periodischen Kettenbruches; in VI aber stehen die Nenner der vollständigen Quotienten, welche aus der Entwicklung von $\sqrt{N}$ in einen Kettenbruch nach der Methode von Lagrange hervorgehen.

Wie aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen ist, trifft die in 6 aufgestellte Behauptung nicht immer zu, denn obgleich in VI die Zahl 3 zweimal nacheinander auftritt, so ist die Rechnung noch nicht geschlossen, sondern es geschieht dies erst dann, wenn in I die Zahl 20 zu stehen kommt, neben welcher in II eine sich unmittelbar wiederholende Zahl (Null) steht.

Daher muss die Rechnung so lange fortgesetzt werden, bis in I die daselbst oben stehende Zahl (10) verdoppelt auftritt, dann erst ist die Rechnung geschlossen.

I	II	III	IV	V	VI
10	$\times$	10 =	109	—	9
2	2	8	64	45	5
3	3	7	49	60	12
1	5	5	25	84	7
2	1	9	81	28	4
4	3	7	49	60	15
1	2	8	64	45	3
6	0	10	100	9	3
6	2	8	64	45	15

I	II	III	IV	V	VI
1	3	7	49	60	4
4	1	9	81	28	7
2	5	5	25	84	12
1	3	7	49	60	5
3	2	8	64	45	15
1	3	7	49	60	4
4	1	9	81	28	7
2	5	5	25	84	12
1	3	7	49	60	5
3	2	8	64	45	9
2	0	10	100	9	1
20	0	10	100	9	9.

Jetzt ist die Rechnung geschlossen.